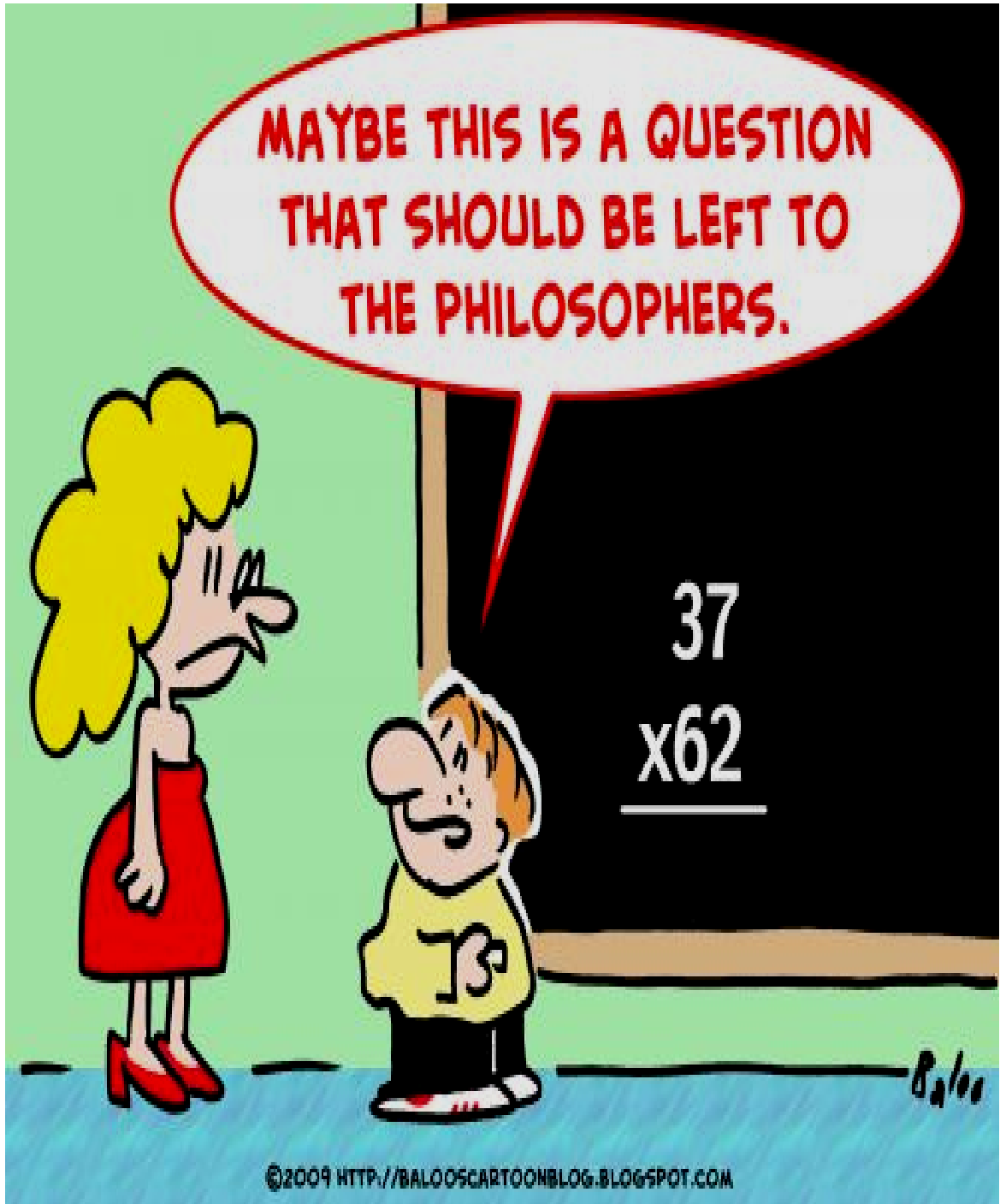


ΜΕΓΑΛΟΠΟΛΗ ΕΤΟΣ 2012-2013, Β ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Υπεύθυνη καθηγήτρια : Λέφα Αικατερίνη,

Ομάδα : «κάνε μια $f(x)$ » με τα ακόλουθα μέλη:

- Αθανασόπουλος Ευστάθιος
- Κουρής Αθανάσιος
- Κούτρη Χριστίνα
- Λυμπεροπούλου Κωνσταντίνα



Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- Σελ. 1 «εξώφυλλο»
- Σελ. 2 «τίτλος»
- Σελ. 3 «περιεχόμενα»
- Σελ. 4 «εισαγωγή»
- Σελ. 5 «στόχοι και βλέψεις της ομάδας μας»
- Σελ. 6 « μεθοδολογία»
- Σελ. 7-8 «η απαρχή της αρίθμησης»
- Σελ. 9-10 « η πορεία εξέλιξης της αρίθμησης και η εμφάνιση των μαθηματικών»
- Σελ. 11-12 « ο υπολογισμός : ένα στάδιο μετά την αρίθμηση»
- Σελ. 13-15 « ο πολιτισμός των Σουμερίων»
- Σελ. 16-17 « τα επιτεύγματα των Βαβυλωνίων»
- Σελ. 18-19 « ο πολιτισμός και τα επιτεύγματα των Αιγυπτίων»
- Σελ. 20-24 « συνοπτική παρουσίαση αποτελεσμάτων της εργασίας»
- Σελ. 25 « τα συμπεράσματα»
- Σελ. 26 « επίλογος»
- Σελ. 27 « βιβλιογραφία»

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ομάδα μας αυτό το τετράμηνο ασχολήθηκε με ένα πολύκροτο θέμα στη μαθητική κοινότητα, την ιστορία των αριθμών. Αφετηρία της έρευνάς μας αποτέλεσε η έννοια της αρίθμησης. Πιο συγκεκριμένα ανακαλύψαμε τις συλλογιστικές διεργασίες της και βολιδοσκοπήσαμε το μέρος του εγκεφάλου στο οποίο πραγματοποιείται. Ακόμα διερευνήσαμε τη διαδικασία μέτρησης των προγόνων μας και επιχειρήσαμε να ανακαλύψουμε την απαρχή της αρίθμησης.

Επιπρόσθετα, επισημάναμε τον αρχικό τρόπο αρίθμησης, την χρονική περίοδο που παρατηρείται και από ποιούς ανθρώπους. Μελετήσαμε την πορεία εξέλιξης της αρίθμησης τόσο στην πράξη, όσο και στον χρόνο. Αποκομίσαμε πληροφορίες για τη χρονολογία της εμφάνισης του δυαδικού και του πενταδικού συστήματος καθώς και την αίτια της εφεύρεσης και της ανάπτυξης της γραφής των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών.

Ερευνήσαμε τι συνέβη μεταξύ δεκατρείς χιλιάδες και έντεκα χιλιάδες χρόνια πριν και πώς άλλαξε ο τρόπος ζωής των ανθρώπων (πέραςμα από τον κυνηγό-τροφοσυλλέκτη σε μόνιμα εγκατεστημένες αγροτικές κοινωνίες). Μετέπειτα, ασχοληθήκαμε με τους αρχαίους πολιτισμούς και ειδικότερα με τους Βαβυλωνίους και τους Σουμέριους. Για τον κάθε πολιτισμό αντλήσαμε πληροφορίες σχετικές με τα επιτεύγματα όπως επίσης και για τη μαθηματική τους πορεία. Αξιοσημείωτο επισήμανσης αποτελεί το γεγονός ότι η διαδικασία που ακολούθησαν για την αντιμετώπιση των προβλημάτων που προέκυψαν ήταν προηγμένη με βάση τα δεδομένα εκείνης της εποχής.

Το κεφάλαιο που ολοκληρώνει την έρευνά μας είναι αυτό που ασχολείται με τον πολιτισμό των Αιγυπτίων καθώς και με τα συστήματα γραφής που οι ίδιοι ανέπτυξαν. Πετυχαίνουμε να πληροφορηθούμε για τα αιγυπτιακά μαθηματικά και πιο συγκεκριμένα για το αιγυπτιακό σύστημα αρίθμησης του οποίου εξαιρετο χαρακτηριστικό αποτελούσαν τα ιδιότυπα κλάσματα. Τέλος, παρουσιάζουμε τις ανάγκες της καθημερινότητας που οδήγησαν στην ανάπτυξη των μαθηματικών τους και ποιο ήταν το αιγυπτιακό ημερολόγιο.

ΣΤΟΧΟΙ ΚΑΙ ΒΛΕΨΕΙΣ ΤΗΣ ΟΜΑΔΑΣ ΜΑΣ

Τους προηγούμενους τέσσερις μήνες εργαστήκαμε σκληρά, εξουθενωτικά και εξαντλητικά με σκοπό να καταλήξουμε σε ένα ολοκληρωμένο αποτέλεσμα, την παρούσα τελική έκθεση. Υπάρχουν , όμως περισσότερα από το υπερκείμενο, κίνητρα για τα οποία υπεστήκαμε αυτήν την διαδικασία.

Κατ' αρχήν, αυτό το τόσο ενδιαφέρον θέμα , η «ιστορία των αριθμών», τίτλος που μόνο στο άκουσμά του , κάποιος κάνει υπέρμετρους συνειρμούς επιστημονικών ανακαλύψεων, τίτλος που προκαλεί συγκίνηση για την ιστορία, για τα μαθηματικά , για την εξέλιξη, για την τεχνολογία, για το μέλλον ολόκληρης της ανθρωπότητας ήταν η αιτία να επιλέξουμε να εντρυφήσουμε πάνω του με σκοπό την μόρφωση και την αποκάλυψη της αλήθειας πίσω από τον μύθο των μαθηματικών. Μάθαμε τα μαθηματικά με πολύ διαφορετικό τρόπο, πέρα από τα στενά όρια της άλγεβρας και της γεωμετρίας, χωρίς συγκεκριμένη ύλη, μάθαμε την φιλοσοφία των μαθηματικών. Συνειδητοποιήσαμε την απαρχή τους και την μέγιστη σημασία που είχαν στην ζωή των ανθρώπων τότε ώστε οι ίδιοι να εφευρίσκουν όλο και περισσότερα μαθηματικά τεχνάσματα για να λύσουν καθημερινά προβλήματα, να προάγουν τον πολιτισμό τους και να έχουν τα μαθηματικά ως αρωγό στην δύσκολη και σκληρή πραγματικότητα.

Η έρευνα, αυτή, όμως δεν πραγματοποιήθηκε με μόνο κίνητρο την ικανοποίηση της απορίας μας. Θέλαμε να μοιραστούμε μαζί σας αυτά τα αποτελέσματα που δείχνουν το μεγαλείο των μαθηματικών και αναμοχλεύουν την όλη εντύπωση που είχαμε μέχρι τώρα για τα «βαρετά» , «επιστημονικά» και «άχρηστα» μαθηματικά που διδασκόμαστε στις σχολικές αίθουσες. Ο κύριος σκοπός ήταν να ξεπεραστεί αυτή η προκατάληψη εναντίον των μαθηματικών. Πρέπει όλοι να συνειδητοποιήσουμε ότι τα μαθηματικά δεν είναι απλά ένα σχολικό , «βασανιστικό» μάθημα ή ένα συνονθύλευμα εξισώσεων, αλλά είναι μια φιλοσοφία που στην πραγματικότητα ακολουθούμε όλοι μας συνειδητά ή ασυνειδητα, αφού συνδέονται άρρηκτα με τον ανθρώπινο τρόπο σκέψης, γιατί τα μαθηματικά είναι, τελικά, τρόπος ζωής*.

*Πολλοί, βέβαια, υποστηρίζουν ότι τα μαθηματικά είναι η γλώσσα του μέλλοντος λόγω των διάφορων συμβόλων που έχουν, τα οποία αναγνωρίζονται παγκοσμίως από όλη την διεθνή κοινωνία.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Με σκοπό την άρτια συνεργασία μεταξύ των μελών της ομάδας μας με την επωνομασία «κάνε μια $f(x)$ » αποφασίσαμε ότι η ίδια θα πρέπει να απαρτίζεται από τα ακόλουθα μέλη:

- Αθανασόπουλος Ευστάθιος
- Κουρής Αθανάσιος
- Κούτρη Χριστίνα
- Λυμπεροπούλου Κωνσταντίνα

Η μεγάλη πλειοψηφία των πληροφοριών που συλλέξαμε με απώτερο σκοπό την σύνταξη της τελικής έκθεσης ήταν από φυλλάδια (φωτοτυπίες από το βιβλίο «ο ταξιδευτής των μαθηματικών», του Calvin C. Clawson) που μας παρείχε η κυρία Λέφα Αικατερίνη, την οποία ευχαριστούμε θερμά.

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε είχε τα εξής στάδια:

- Παίρναμε τις αντίστοιχες φωτοτυπίες κάθε φορά μαζί με ένα ερωτηματολόγιο που ανταποκρινόταν σε αυτές υπό την επιμέλεια της κυρίας Λέφας Αικατερίνης, την οποία εκτιμούμε από τα μύχια βάθη της καρδιάς μας.
- Μοιραζόμασταν ισάξια τις ερωτήσεις
- Απαντούσαμε σε αυτές κατά την διάρκεια του 2ωρου και καταγράφαμε τις απαντήσεις μας σε έντυπη μορφή
- Τελικά, ένα μέλος της ομάδας αναλάμβανε να δακτυλογραφήσει όλες τις απαντήσεις σε ηλεκτρονική μορφή.

Η ΑΠΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Η αρίθμηση σχετίζεται με την ανάγκη μας να μετράμε. Από πολύ μικρή ηλικία μιμούμαστε τους μεγαλύτερους μαθαίνοντας να μετράμε με τα δάχτυλα και να βρίσκουμε το πλήθος των αντικειμένων χωρίς να καταλαβαίνουμε πραγματικά πόσα είναι. Όμως με την πρόοδο του χρόνου αντιληφθήκαμε πως μια διαδικασία αρίθμησης είναι και μια διαδικασία εύρεσης του σωστού, πληθικού αριθμού, ενός συνόλου. Η διαδικασία της αρίθμησης επιτυγχάνεται αν ακολουθήσουμε τρία βήματα. Κατ' αρχάς, προσδιορίζουμε ένα σύνολο και προσδοκούμε να βρούμε το πλήθος των στοιχείων. Δεύτερον, δείχνουμε κάποια στοιχεία του συνόλου και ταυτόχρονα λέμε τον κατάλληλο αριθμό. Τρίτον, αφού αριθμήσουμε όλα τα στοιχεία και φτάσουμε στο τελευταίο, ο αριθμός αυτός θα είναι του συνόλου.

Για να βρούμε που θα μπορούσαν να βρίσκονται οι αριθμητικές μας δεξιότητες, εξετάζουμε προσεκτικά την δομή του εγκεφάλου. Ο εγκέφαλος αποτελείται από τρία μέρη, το εγκεφαλικό στέλεχος, την παρεγκεφαλίδα και τον νεοφλοιό στην κορυφή του εγκεφάλου. Για να προσδιορίσουμε τον ρόλο του, στην αρίθμηση θα επικεντρωθούμε στον νεοφλοιό ο οποίος αποτελεί την έδρα της μνήμης, της μάθησης και των πνευματικών δεξιοτήτων, καθώς και το χώρο στον οποίο εδρεύουν σημαντικές λειτουργίες, όπως η όραση, η γλώσσα και η ακοή.

Επίσης, πέρα από τον νεοφλοιό η μέτρηση **ίσως** σχετίζεται και με το δεξι ημισφαίριο του εγκεφάλου, το οποίο δρα με ποιο άμεσο τρόπο από το αριστερό και συνδέεται με την άμεση οπτική αντίληψη, τις χωρικές σχέσεις και τις κινητικές δεξιότητες. Για παράδειγμα, παιδιά που έχουν βλάβη εκ γενετής στο δεξί μέρος του εγκεφάλου, μερικές φορές δεν έχουν την ικανότητα να αναγνωρίζουν ομάδες αντικειμένων που βρίσκονται στο οπτικό τους πεδίο ή να κατανοούν την έννοια του πλήθους των στοιχείων. Εν κατακλείδι, δεν μπορούμε να ορίσουμε συγκεκριμένο μέρος του εγκεφάλου που αντιστοιχεί στην αρίθμηση.

Η πρωταρχική πράξη αρίθμησης είναι έμφυτη στους ανθρώπους και δεν μαθαίνεται. Επομένως, το δεξί ημισφαίριο φαίνεται να είναι ζωτικής σημασίας όσον αφορά την εκμάθηση της αρίθμησης, αφού το πρώτο βήμα για την αρίθμηση είναι η αντίληψη του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου.

Επιπρόσθετα, η μέτρηση δεν σχετίζεται με την γλώσσα. Με άλλα λόγια, η γλώσσα δεν είναι προϋπόθεση για την μέτρηση. Ο Μένινγκερ επισημαίνει ότι κάποιες πρωτόγονες φυλές, όπως η φυλή Βέντα στο νησί της Σρι Λάνκα, δεν

μετρούν απεικονίζοντας αριθμητικές λέξεις σε στοιχεία αλλά απεικονίζοντας κλαδιά ή άλλα αντικείμενα στα στοιχεία που πρόκειται να μετρηθούν . Αλλά ας τα πάρουμε όλα από την αρχή.

Από την προϊστορία ακόμα μέχρι και το 3000π.Χ. εμφανίζονται κάποιες μορφές αριθμησης. Ο Αυστραλιανός πίθηκος (5000000-6000000 χρόνια πριν) ήταν η μεταγενέστερη μορφή πιθήκου και η πιο πλησιέστερη στον πρώτο άνθρωπο, θα μπορούσε να θεωρηθεί , δηλαδή η αρχή της ανθρώπινης εξέλιξης όσον αφορά την εμφάνιση και τις διανοητικές του ικανότητες. Παρ' όλο που ο εγκέφαλος έγινε μεγαλύτερος και η αντίληψή του καλύτερη, δεν παρατηρείται κάποια μορφή αρίθμησης από αυτόν, όπως γίνεται και με τον homo habilis. Ο Homo habilis (2000000 χρόνια πριν) είναι η εξέλιξη του Αυστραλιανού πιθήκου , ο οποίος μοιάζει πλέον πιο πολύ σε ανθρωπόμορφο παρά σε πίθηκο και ο οποίος έχει ακόμα πιο ανεπτυγμένο εγκέφαλο απ' αυτόν.

Τρίτος στη σειρά είναι ο homo erectus (περίπου 1.500000 χρόνια πριν). Την εποχή της εμφάνισης του παρατηρείται η πρώτη μορφή αρίθμησης , η αρίθμηση με κλαδιά. Η αρίθμηση με κλαδιά στηριζόταν στην θεωρία της **αναλογίας 1 προς 1**, η οποία ήταν πολύ χρήσιμη και ευφυής για τα δεδομένα εκείνης της εποχής.

Ο homo erectus κατασκεύαζε καταφύγια, ήταν παμφάγος και χρησιμοποιούσε την φωτιά. Έτσι του ήταν εύκολο να φύγει από την Αμερική και να αναζητήσει πιο εύκρατα κλίματα στην Ευρώπη και την Ασία για να ζήσει. Η εγκατάστασή του σε αυτές τις χώρες και η καθημερινότητα του είναι πολύ πιθανό να αποτελούν τις συνθήκες για την εύνοια της αρίθμησης με κλαδιά καθώς έπρεπε να ξέρει για παράδειγμα πόσα ζώα έφυγαν από το κοπάδι ή να προσδιορίσει τον χρόνο που έχει για κυνήγι μέχρι να νυχτώσει.

Η μεταγενέστερη μορφή του homo erectus ήταν ο homo sapiens (περίπου 500000 χρόνια πριν). Πιθανολογείται η σημερινή μορφή αρίθμησης σε λίγο πιο απλή μορφή βέβαια να έχει σχέση με τον homo sapiens sapiens αφού οι χρονολογίες εμφάνισης και των δύο συμπίπτουν.

Η ΠΟΡΕΙΑ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ ΚΑΙ Η ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Περίπου πριν από 1.500.000 χρόνια ο αρχικός τρόπος αρίθμησης είναι η αρίθμηση με κλαδιά την οποία χρησιμοποιούσε ο homo sapiens .Ωστόσο αυτή η αρίθμηση σταδιακά εξελίσσεται και οι άνθρωποι τότε χρησιμοποιούν τα δάχτυλά τους και αργότερα και άλλα μέρη του σώματος τους για να έχουν την ευκολία να μετρούν μέχρι ένα μεγαλύτερο αριθμό .Η αρίθμηση με τα δάχτυλα δεν περιέχει λέξεις όπως και η αρίθμηση με τα κλαδιά και έτσι υποθέσαμε ότι εμφανίστηκαν περίπου την ίδια χρονολογία .

Ήταν διαδεδομένη σε όλο τον κόσμο και αποτέλεσε μεγάλο θεμέλιο για την έννοια των αριθμών του σήμερα .Αυτό γιατί αυτού του είδους η αρίθμηση συμπεριελάμβανε τους συντεταγμένους αριθμούς ,οι οποίοι αποδίδουν σειρά και διάταξη ,αφού δείχνουν τη σειρά ενός στοιχείου σ' ένα σύνολο . Η αρίθμηση με το σώμα που διαδέχεται την αρίθμηση με τα δάχτυλα βοήθησε τους ανθρώπους να μετρούν μέχρι ένα μεγαλύτερο αριθμό. Επίσης χρησίμευε στη μετάδοση μηνυμάτων από απόσταση για συντονισμό ομάδων κτλ.

Η πορεία εξέλιξης της αρίθμησης φαίνεται από το ακόλουθο σχεδιάγραμμα:
αρίθμηση με κλαδιά→αρίθμηση με δάχτυλα→αρίθμηση με το σώμα→φωνητική αρίθμηση(δυναδική, πενταδική και δεκαδική)

Τα υπερκείμενα στάδια αρίθμησης αναλύονται παρακάτω. Η δυναδική αρίθμηση είναι η επανάληψη των φωνητικών λέξεων ένα και δύο ,όσες φορές χρειάζεται για να σχηματιστεί η νέα λέξη .Το σύστημα αυτό της αρίθμησης είναι περιορισμένο αφού συνοδεύεται με την αρίθμηση με τα δάχτυλα .Επίσης γι' αυτόν τον λόγο μπορεί εύκολα να αντικατασταθεί από απλή αρίθμηση με δάχτυλα.

Ακόμα και η αρίθμηση με κλαδιά είναι πιο αποτελεσματική .Το επόμενο στάδιο της εξέλιξης είναι η πενταδική αρίθμηση. Σε κάποιες περιπτώσεις γλώσσες που την χρησιμοποιούν ,οι αριθμητικές λέξεις πέρα από τα τέσσερα, στην πραγματικότητα περιγράφουν τις χειρονομίες που χρησιμοποιούν για να μετρήσουν με τα δάχτυλα τον αντίστοιχο αριθμό .Το σύστημα της πενταδικής αρίθμησης εξελίχθηκε σε δύο διαφορετικά είδη αρίθμησης ,η πενταδική και δεκαδική καθώς και η εικοσαδική.

Ισχυρίζεται πως από τότε που οι άνθρωποι απέκτησαν ελεύθερο χρόνο ,ώστε οι κυβερνήτες ,οι ιερείς ή οι δημόσιοι υπάλληλοι δημιούργησαν τη γραφή, τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες. Αυτός όμως ο ισχυρισμός δεν είναι σωστός ,καθώς ο ελεύθερος χρόνος δημιουργεί προβλήματα και όχι σημαντικές εφευρέσεις .Συμπεραίνεται πως η γραφή, τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες επινοήθηκαν για την επίλυση των καθημερινών προβλημάτων των ανθρώπων.

Το ορόσημο που οριοθετεί την πρώιμη αρίθμηση από την αρίθμηση που μοιάζει με την σημερινή είναι η γεωργία, δηλαδή το προμελετημένο και επιλεκτικό φύτεμα σπόρων για την παραγωγή τροφής που ξεκίνησε στη Γόνιμη Ημισέληνο πριν από εκατό χιλιάδες χρόνια.



Ο ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ : ΕΝΑ ΣΤΑΔΙΟ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΣΗ

13.000 χρόνια πριν , ξεκίνησαν οι αγροκαλλιέργειες, όπου οι άνθρωποι

χρησιμοποιούσαν ξύλινες ράβδους με ενσωματωμένους, κοφτερούς πυρόλιθους για να θερίζουν άγρια σιτηρά. Τα σιτηρά ήταν ευλογία για τους ανθρώπους αφού δεν χαλούσαν όταν ο καιρός ήταν ζεστός, σ' αντίθεση με το κρέας. Έτσι, προκειμένου να καλλιεργούνται τα σιτηρά, οι άνθρωποι φρουρούσαν τα χωράφια, τα πότιζαν και γενικά βοηθούσαν στην ανάπτυξή τους. Οι αληθινές αγροκαλλιέργειες εμφανίστηκαν όταν οι άνθρωποι άρχισαν να φυλάσσουν κάποιους σπόρους που μάζευαν για να τους φυτέψουν την επόμενη χρονιά. Έτσι, άλλαξαν οι μελλοντικές σοδειές μέσα από την επιλεκτική καλλιέργεια. Σημαντικό είναι να υπογραμμισθεί ότι η πρώτη μεγάλη καλλιέργεια σιτηρών στη δυτική Ασία ήταν το κριθάρι από το οποίο παράχθηκαν η μπίρα και το πρώτο ψωμί.

Η παλιότερη τέτοια αγροκαλλιέργεια εμφανίστηκε γύρω στο 11.000 π. Χ σε μια περίοδο που ονομάστηκε Γόνιμη Πανσέληνος. Το πρώτο χωριό αγροκαλλιέργειας εμφανίστηκε στη νότια Τουρκία και στο βόρειο Ιράκ , στους λόφους του Ζάγρου. Η ανάπτυξη των χωριών με αγροκαλλιέργειες είχε ως αποτέλεσμα την εμφάνιση καινούργιων επαγγελμάτων όπως του κεραμοποιού (6500 π. Χ) και του υφαντού.

Οι αγροκαλλιέργειες είχαν πλεονέκτημα την ποικιλία και μεγάλη παραγωγή τροφών. Έτσι γινόταν επιτρεπτή η παραμονή σε κάποιον τόπο και η κατασκευή μόνιμης κατοικίας , με την προϋπόθεση την φύλαξη της ποσότητας των σιτηρών. Ακόμα, το γεγονός της ανταλλαγής αντικειμένων με αγαθά από άλλες χώρες σχετίζεται με την δημιουργία μόνιμης κατοικίας των ανθρώπων.

Ακόμα, η ανάγκη να προστατεύσουν τις σοδειές τους από την γη, τα καιρικά φαινόμενα και από διάφορους επιδρομείς , οδήγησαν στην ανάπτυξη υπολογισμών. Συγκεκριμένα, οι αγρότες χρειάζονταν ημερολόγιο για να προσδιορίσουν την κατάλληλη εποχή για να φυτέψουν κάθε είδος. Αυτή η ικανότητα απαιτούσε περισσότερες υπολογιστικές δεξιότητες για την παρακολούθηση των θέσεων των άστρων και των μελλοντικών τους θέσεων.

Αναπτύχθηκαν τρεις διαφορετικές λύσεις όσον αφορά την τήρηση αριθμητικών αρχείων:

- Οι ράβδοι με εγκοπές.
- Τα σχοινιά με κόμπους.
- Πήλινα κουπόνια ή μάρκες.

Αρχικά, οι ράβδοι με εγκοπές ήταν ξύλινες ή κοκάλινες ράβδοι που υποδήλωναν κάποιους αριθμούς. Οι περισσότερες ράβδοι με εγκοπές ήταν ξύλινες. Δημοφιλής ήταν η διπλή ράβδος με εγκοπές που χρησιμοποιούνταν για την καταγραφή των χρεών. Η ράβδος είχε δύο άκρα. Το πρώτο το κρατούσε ο δανειστής ενώ το μικρό (και το δεύτερο) ο οφειλέτης. Η δεύτερη μέθοδος ήταν το κορδόνι ή το σχοινί με κόμπους. Ήταν διαδεδομένη και χρησιμοποιούνταν ως μέθοδος γραφής. Τα πιο εξελιγμένα κατασκευάστηκαν από τους Ίνκας στο Περού. Η Τρίτη μέθοδος και η πιο σημαντική : τα πήλινα κουπόνια ή οι μάρκες. Για πολλές δεκαετίες οι ερευνητές-αρχαιολόγοι βρίσκονταν σε σύγχυση εξαιτίας των μικρών, πήλινων τεχνουργημάτων που βρίσκονταν σε νεολιθικές πόλεις. Τα κουπόνια χρησιμοποιούνταν ευρέως στους λογαριασμούς από την αρχή της όγδοης χιλιετίας και είχαν απλό σχήμα και σχέδιο σε διαφορετικά σχήματα και αναπαριστούσαν ποικίλα αντικείμενα.

Ο ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΟΥΜΕΡΙΩΝ

Ο λαός των Σουμέριων εμφανίστηκε κατά τη διάρκεια της παλαιολιθικής εποχής (4500-3000 π. Χ) στο κατώτερο τμήμα της πεδιάδας της Μεσοποταμίας , σε μια περιοχή γνωστή με το όνομα Σουμερία , το σημερινό νότιο Ιράκ. Έφτασαν στο νότιο Ιράκ γύρω στο 3500 π. Χ . όπου δημιούργησαν μια αυτοκρατορία που διήρκησε μέχρι την κατάκτηση από τους

Βαβυλωνίους περίπου το 2000 π. Χ. Τότε υπήρχαν περισσότερες από 12 πόλεις στην περιοχή της Σουμερίας με μεγαλύτερη την πόλη Ουρ. Εκεί ζούσαν περίπου 25.000 άτομα, ενώ υπήρχαν έως και διακόσιες χιλιάδες άτομα στα τριγύρω χωριά με αγροκαλλιέργειες. Έως αυτή την εποχή είχαν αναπτυχθεί και άλλες πόλεις στη Γόνιμη Ημισέληνο.

Όμως, δημιουργήθηκε το εξής πρόβλημα: για να ακμάσουν οι πόλεις έπρεπε να ανταλλάσσουν εμπορεύματα και πρώτες ύλες με άλλες πόλεις. Για παράδειγμα, στην περιοχή που βρίσκονταν οι πόλεις των Σουμερίων δεν υπήρχε πρόσβαση σε καλή ξυλεία ή οικοδομικούς λίθους ή μέταλλά όπως ο χαλκός, το ασήμι και ο χρυσός. Η ανάγκη μεταφοράς των αγαθών και επαλήθευσης των φορτίων έκαναν ακόμα μεγαλύτερες τις απαιτήσεις για λογιστές.

Κάθε φορτίο έπρεπε να συνοδεύεται με ένα έγγραφο ώστε ο αγοραστής να ξέρει ότι δεν το κορόιδεψαν ούτε ο πωλητής, ούτε ο υπεύθυνος μεταφοράς. Το «έγγραφο» αποτελούνταν από ένα σύνολο κουπονιών που προσδιόριζαν τον αριθμό και το είδος των αγαθών που μεταφέρονταν. Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό επίτευγμα αν λάβουμε υπ' όψιν μας τα δεδομένα εκείνης της εποχής. Όμως, ο πωλητής δεν μπορούσε απλώς να τοποθετήσει αυτά τα κουπόνια σε ένα σακούλι αφού ο καθένας μπορούσε να κλέψει αγαθά και μετά να κλέψει και τον κατάλληλο αριθμό κουπονιών. Έτσι ώστε το φορτίο να φαίνεται πλήρες. Επομένως, η πόλεις της Γόνιμης Ημισελήνου επινόησαν μια έξυπνη τεχνική για να φρουρούν τα κουπόνια. Τα κάλυπταν με πηλό και μετά έψηναν τον πηλό. Όταν το φορτίο παραδίδονταν στον αγοραστή, εκείνος έσπαγε τον πηλό και επαλήθευε ότι τα κουπόνια που περιείχε αντιστοιχούσαν στα αγαθά που παραδίδονταν.

Δυστυχώς, προέκυψε και το πρόβλημα ότι αν το φορτίο το μετέφεραν δύο μεταφορείς, τότε θα έπρεπε ο πρώτος να ξέρει ότι θα παρέδιδε στον δεύτερο τις σωστές ποσότητες, χωρίς βέβαια να σπάσει τον πηλό! Η λύση του προβλήματος έγκειται στο γεγονός ότι έπρεπε να χαράξουν ή να ζωγραφίσουν μια εικόνα των κουπονιών που βρίσκονταν μέσα στο φάκελο στην εξωτερική του επιφάνεια πριν ψηθεί. Έτσι, γεννήθηκε η γραφή. Αυτού του είδους η γραφή-απεικόνιση χρησιμοποιούνταν σε φακέλους και πλακίδια μεταξύ 3500 και 300 π. Χ. ύστερα, όμως μετά το 3100 π. Χ οι Σουμέριοι έπαψαν να χρησιμοποιούν σύμβολα που απεικόνιζαν και το πλήθος και το

είδος του αντικειμένου και είχαν σύμβολα που απεικόνιζαν μόνο το πλήθος, ανεξάρτητα από το είδος του αντικειμένου. Επίσης ανέπτυξαν τη σφηνοειδή γραφή, με την οποία τα ιδεογράμματα των κουπονιών με την αριθμητική-παραστατική γραφή αντικαταστάθηκαν με φωνητικά σύμβολα και αναπτύχθηκε ένα ξεχωριστό, αφηρημένο σύστημα αρίθμησης. Η γραφή αρχικά γινόταν σε στήλες από δεξιά προς τα αριστερά. Αυτό άλλαξε μετά το 3000 π. Χ και ίσχυε το αντίστροφο στη νέα γραφή.

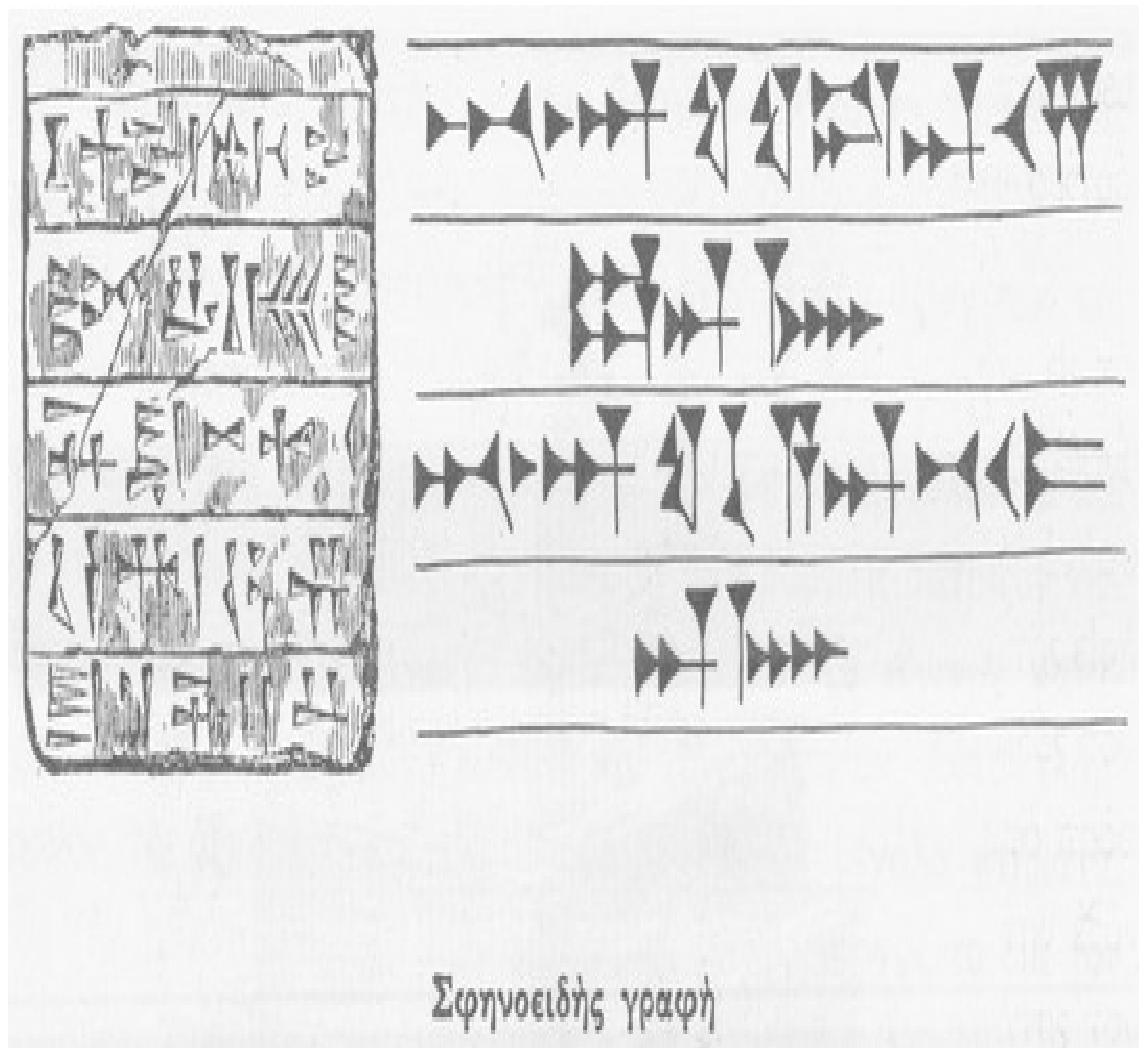
Σύμφωνα με τα αρχαία πλακίδια που σώζονται, οι Σουμέριοι γνώριζαν τέσσερα είδη αρίθμησης:

- Την πρόσθεση.
- Την αφαίρεση.
- Την διαίρεση.
- Τον πολλαπλασιασμό.

Τα κύρια χαρακτηριστικά των μαθηματικών των Σουμερίων είναι ότι έχουν ως βάση το εξήντα, με το δέκα να αποτελεί ενδιάμεσο βήμα καθώς χρησιμοποιούσαν και την μορφή των κλασμάτων. Οι Σουμέριοι μπορούσαν να δουλεύουν με πολύ μεγάλους και μικρούς αριθμούς, αφού χρησιμοποιούσαν τόσο ακέραιους όσο και κλάσματα.

Επίσης, οι Σουμέριοι για να χαράξουν τον αριθμό «1», πίεζαν την γραφίδα πάνω στον πηλό υπό γωνία, με αποτέλεσμα να σχηματίζεται ένα ημικύκλιο που έμοιαζε κάπως με κεφαλαίο «D». Όταν έφταναν στον αριθμό «10» πίεζαν την γραφίδα κάθετα μέσα στον πηλό και έτσι σχηματίζονταν ένας μικρός κύκλος(0), (από το «1» έως το «59» χρησιμοποιούσαν ένα συνδυασμό μονάδων και δεκάδων.) για το «60» ζωγράφιζαν ένα μεγάλο σύμβολο με το σχήμα «D» ακουμπισμένο στα πλάγια. Το επόμενο βήμα ήταν το 600 ή το 6010 με σύμβολο το «D» με κύριο χαρακτηριστικό το ότι είχε έναν μικρό κύκλο στο εσωτερικό του. Το 60.60 συμβολίζονταν με ένα μεγάλο κύκλο και το 36000 με ένα μεγάλο κύκλο και στο εσωτερικό του με ένα μικρό κύκλο. Το πρώτο αριθμητικό σύστημα των Σουμερίων ήταν ένα μη καθορισμένο από τη θέση σύστημα. Η τιμή των συμβόλων δεν εξαρτιόταν από τη θέση τους όπως στο σημερινό σύστημα. Γύρω στο 2400 π . Χ οι Σουμέριοι έκοβαν επιταγές, υπολόγιζαν τη γη σε σαρ, ζύγιζαν τα τάλαντα, μετρούσαν υγρά και

υπολόγιζαν τόκους. Αξίζει να πούμε ότι χρησιμοποιούσαν τα κλάσματα : $1/6$, $1/3$, $5/6$.



ΤΑ ΕΠΙΤΕΥΓΜΑΤΑ ΤΩΝ ΒΑΒΥΛΩΝΙΩΝ

Οι Βαβυλώνιοι εμφανίστηκαν περίπου το 2000 π.Χ και έγιναν γνωστοί όταν πολιορκήσαν την γη των Σουμερίων (2006 π. Χ). Αφού συνέχισαν τις πολιορκίες κατάφεραν να πάρουν στην κατοχή τους τις περιοχές του σημερινού Ιράκ, της Ιορδανίας και της Συρίας και η αυτοκρατορία τους

διήρησε μέχρι το 538 π.Χ. Οι Βαβυλώνιοι φαίνεται ότι επηρεάστηκαν λόγω της πολιορκίας τους προς τους Σουμέριους από το ότι κράτησαν διάφορα χαρακτηριστικά της γραφής και των μαθηματικών τους. Πρώτον, κράτησαν την σφηνοειδή γραφή. Δεύτερον, ακολούθησαν και αυτοί το βασικό σύστημα αρίθμησης των Σουμέριων το οποίο είχε ως βάση το «10» και το «60», κρατώντας, επίσης, δύο από τα σύμβολά τους : την σφήνα που συμβόλιζε το «1» και το άγκιστρο που συμβόλιζε το «10». Η καινοτομία των Βαβυλωνίων είναι ότι χρησιμοποιούσαν ένα καθοριζόμενο από την θέση σύστημα αρίθμησης όπως και το σημερινό δεκαδικό δηλαδή , για παράδειγμα τη θέση του «1» στον αριθμό 713 υποδηλώνει ότι το «1» είναι στην πραγματικότητα το «10» (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες και τα λοιπά). Μόνο που οι Βαβυλώνιοι είχαν ως βάση το «60» αντί για το «10».

Το συγκεκριμένο σύστημα ήταν πολύ χρήσιμο γιατί επέτρεπε στους Βαβυλώνιους να παριστάνουν κλάσματα, να γράφουν εξαιρετικά μεγάλους αλλά και εξαιρετικά μικρούς αλλά και για τον υπολογισμό του βάρους, της ποσότητας αλλά και του εμβαδού της γης. (Το «60» διαιρείται τέλεια από πολλούς μικρούς αριθμούς και έτσι διευκόλυνε αυτές τις πράξεις.) . Ωστόσο το καθορισμένο από τη θέση σύστημα αρίθμησης παρουσίαζε δύο μειονεκτήματα: Πρώτον δεν υπήρχαν αριθμοί θέσης (εκείνοι που αλλάζοντας την θέση τους αλλάζει και το μέγεθος τους) όπως το μηδέν και δεύτερον η έλλειψη υποδιαστολής που δυσκόλευε την εύρεση του σαφή αριθμού, καθώς τα σύμβολα στην ίδια σειρά μπορούσαν να παριστάνουν πολλούς διαφορετικούς αριθμούς.

Το σύστημα αρίθμησης των Βαβυλωνίων περιελάμβανε πράξεις όπως:

- Πολλαπλασιασμό.
- Υπολογισμό τετραγώνων.
- Αντίστροφων αριθμών.
- Κύβων.
- Τετραγωνικών ριζών.
- Κυβικών ριζών.
- Πίνακες υπολογισμού τόκων.

Επίσης, έμαθαν να προσθέτουν και να πολλαπλασιάζουν και τις δύο πλευρές μιας εξίσωσης με σκοπό να την απλοποιούν, να εκτελούν απλή παραγοντοποίηση όρων και για τον συμβολισμό ποσοτήτων χρησιμοποιούσαν τους όρους :όγκος, πλάτος, μήκος. Μπορούσαν να λύσουν συστήματα εξισώσεων με δύο αγνώστους , ορισμένες δευτεροβάθμιες εξισώσεις, μερικές κυβικές εξισώσεις και γνώριζαν και το Πυθαγόρειο Θεώρημα(πιθανολογείται ότι αυτοί μαζί με τους κινέζους το ήξεραν από πριν). Τέλος, έφτασαν κοντά στην ανακάλυψη των άρρητων αριθμών.

Τα επιτεύγματα των Σουμέριων και των Βαβυλωνίων είναι τα εξής:

- Εφευρέθηκε η γραφή.
- Εισήχθησαν τα κλάσματα.
- Αναπτύχθηκε ένα καθορισμένο από τη θέση αριθμητικό σύστημα.
- Τα μαθηματικά εξελίχθηκαν από την απλή αρίθμηση πραγμάτων (υπολογισμοί) στην επίλυση προβλημάτων (άλγεβρα) και στη μέτρηση μεγεθών (γεωμετρία).

1	Υ	11	<Υ	21	≪Υ	31	≪≪Υ	41	⌘Υ	51	⌘Υ
2	Π	12	<Π	22	≪Π	32	≪≪Π	42	⌘Π	52	⌘Π
3	ΠΠ	13	<ΠΠ	23	≪ΠΠ	33	≪≪ΠΠ	43	⌘ΠΠ	53	⌘ΠΠ
4	▽	14	<▽	24	≪▽	34	≪≪▽	44	⌘▽	54	⌘▽
5	▽▽	15	<▽▽	25	≪▽▽	35	≪≪▽▽	45	⌘▽▽	55	⌘▽▽
6	ΠΠΠ	16	<ΠΠΠ	26	≪ΠΠΠ	36	≪≪ΠΠΠ	46	⌘ΠΠΠ	56	⌘ΠΠΠ
7	⊕	17	<⊕	27	≪⊕	37	≪≪⊕	47	⌘⊕	57	⌘⊕
8	⊕⊕	18	<⊕⊕	28	≪⊕⊕	38	≪≪⊕⊕	48	⌘⊕⊕	58	⌘⊕⊕
9	ΠΠΠ	19	<ΠΠΠ	29	≪ΠΠΠ	39	≪≪ΠΠΠ	49	⌘ΠΠΠ	59	⌘ΠΠΠ
10	<	20	≪	30	≪≪	40	⌘	50	⌘		

Ο ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΑΙΓΥΠΤΙΩΝ

Οι Αιγύπτιοι αναπτύχθηκαν περίπου την πέμπτη χιλιετία π. Χ. και η αυτοκρατορία

τους διήρησε μέχρι την κατάκτηση τους από τον Μέγα Αλέξανδρο το 332 π. Χ. , δηλαδή περίπου τέσσερις χιλιετίες. Μεταξύ 3.000 και 3.500 η Αίγυπτος ενώθηκε από τον Μήνη συγκροτώντας μία παγκόσμια δύναμη η οποία παρέμεινε έτσι για τα επόμενα 3.000 χρόνια. Η ακμή του αιγυπτιακού πολιτισμού χρονολογείται από το 3.000 π. Χ. μέχρι το 2.500 π. Χ , την Τρίτη δυναστεία. Στην περίοδο αυτή τέθηκαν οι βάσεις των μαθηματικών και χτίστηκαν οι περίφημες πυραμίδες.

Η ισχύς του αιγυπτιακού πολιτισμού εξασφάλισε στους Αιγυπτίους διάρκεια και σταθερότητα. Η αναπτυγμένη δύναμη οφείλεται στην άφθονη καλλιέργεια σιταριού κατά μήκος του ποταμού Νείλου και ανακλάται στο γεγονός ότι τα μαθηματικά τους δεν χρειάζονταν περαιτέρω ανάπτυξη.

Δημιουργήθηκαν δύο νέα συστήματα γραφής από τους Αιγυπτίους. Το πρώτο ήταν τα ιερογλυφικά. Ξεκίνησαν απλά ως σύμβολα πανομοιότυπα με εικόνες γύρω στο 3.000 επηρεασμένα από την σφηνοειδή γραφή των Σουμερίων. Χρησιμοποιήθηκαν για να γράφονται επίσημα κείμενα σε μνημεία και ναούς και για την καταγραφή των επιτευγμάτων των Φαραώ μέχρι τον πρώτο αιώνα. Το δεύτερο ήταν η ιερατική γραφή. Χρησιμοποιήθηκε για την διοίκηση της αυτοκρατορίας, ήταν λιγότερη επίσημη και περισσότερο αφηρημένη από τα ιερογλυφικά (απαιτούσε λιγότερες χρονικά στο τέλος της αυτοκρατορίας πινελιές) . Μέσω αυτής της γραφής συγκεντρώσαμε περισσότερες πληροφορίες για τα Αιγυπτιακά μαθηματικά οι οποίες ήταν γραμμένες σε παπύρους που τοποθετούνταν χρονικά στο τέλος της αυτοκρατορίας.

Οι γνώσεις που αφορούν τα αιγυπτιακά μαθήματα προέρχονται από δύο διάσημους παπύρους, που χρονολογείται περίπου στο 1.650π.Χ.Και οι δύο πάπυροι περιέχουν παραδείγματα συνηθισμένων πρακτικών προβλημάτων που αντιμετώπιζαν οι Αιγύπτιοι γραφείς .Ο πάπυρος Ριντ περιέχει τα ογδόντα τέσσερα προβλήματα, ενώ ο πάπυρος της Μόσχας διέθετε μόλις είκοσι πέντε. .Οι γραφείς αυτοί, χρησιμοποιούσαν την ιερατική γραφή για να συγγράψουν τους παπύρους, οι οποίοι ήταν έμπιστοι δούλοι.

Το αιγυπτιακό σύστημα αρίθμησης είχε ως βάση το 10.Στα ιερογλυφικά χρησιμοποιούνταν ένας συνδυασμός γραμμών (|) που αναπαριστούσαν τους αριθμούς από το 1 ως το 9.Στην ιερατική γραφή όμως δεν ίσχυε κάτι τέτοιο. Χρησιμοποιούνταν γραμμές για το 1 ως το 3 και ξεχωριστά σύμβολα για τους αριθμούς 4-9.Ακόμα σύμβολα χρησιμοποιούνταν για τους αριθμούς δέκα, εκατό ,χίλια ,δέκα χιλιάδες κ. τ. λ .π. Το σύστημα ήταν αυστηρά προσθετικό δηλαδή για να διαβαστεί ένας αριθμός έπρεπε να προστεθούν οι τιμές των διαφορετικών συμβόλων. Ωστόσο οι Αιγύπτιοι κατόρθωναν να καταγράφουν αριθμούς που έφταναν σε εκατομμύρια.

Το σύστημα κλασμάτων ήταν δύσχερο. Με εξαίρεση τα κλάσματα $\frac{2}{3}$ και $\frac{3}{4}$ όλα τα κλάσματά τους ήταν μοναδιαία κλάσματα ή κλάσματα όπου ο αριθμητής ήταν το 1 και παρανομαστής οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός .Ως εκ τούτου όλα τα κλάσματα είχαν την μορφή $\frac{1}{n}$.Αυτο σήμαινε ότι οποιοδήποτε γνήσιο κλάσμα με αριθμητή μεγαλύτερο της μονάδας έπρεπε να αναπαρασταθεί ως άθροισμα μοναδιαίων κλασμάτων .Η αναπαράσταση όλων αυτών των κλασμάτων ήταν μια δύσκολη απαίτηση .Για να κάνουν υπολογισμούς με μοναδιαία κλάσματα ,οι Αιγύπτιοι έπρεπε να χρησιμοποιούν πίνακες.

Όμως αυτό το σύστημα χαρακτήρων και συμβόλων είχε θετικές συνέπειες στην ανάπτυξη των μαθηματικών αφού το συγκεκριμένο σύστημα διευκόλυνε τη γραφή των μοναδιαίων κλασμάτων. Συγκεκριμένα χρειαζόταν να γράψουν μόνο τον παρονομαστή ενώ ήταν τρομερά δύσκολο, σχεδόν ακατόρθωτο να σχηματίσουν οποιοδήποτε άλλο κλάσμα πέρα από αυτά. Ειδικά σύμβολα χρησιμοποιούνταν για τα κλάσματα ένα δεύτερο ($1/2$), δύο τρίτα ($2/3$) και ένα τέταρτο ($1/4$). Όμως η προσκόλληση των Αιγυπτίων στα μοναδιαία κλάσματα κατέπνιξε την ανάπτυξη των αριθμών.

Αυτός ο τρόπος γραφής των κλασμάτων διήρκησε από την εποχή των Ρωμαίων έως τη μεσαιωνική περίοδο της Ευρώπης. Τα μαθηματικά των Αιγυπτίων αποτελούνταν από τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής, αλλά οι υπολογισμοί τόσο για τον πολλαπλασιασμό όσο και για τη διαίρεση ήταν από την φύση τους προσθετικοί. Για το πολλαπλασιασμό δύο αριθμών, απλώς καταγράφονταν σε μια στήλη τα πολλαπλάσια του ενός εκ των δύο αριθμών αρχίζοντας από το 1 και , πολλαπλασιάζοντας καθώς προχωρούσαμε με το 2 , στο 4 κ. τ. λ . Η διαίρεση βασίζεται στην ίδια γενική διαδικασία . οι Αιγύπτιοι στα μαθηματικά τους χρησιμοποιούσαν σύμβολα για διάφορους υπολογισμούς, όχι όμως σαν αυτά που χρησιμοποιούμε εμείς σήμερα . Το σύμβολο για την πρόσθεση ήταν ένας άντρας που έμπαινε σε ένα σπίτι ενώ το σύμβολο της αφαίρεσης ήταν ένας άντρας που έβγαινε από το σπίτι.

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Κατ' αρχήν, από πολύ μικρή ηλικία μαθαίναμε να μετράμε χρησιμοποιώντας τα δάχτυλα και να βρίσκουμε το πλήθος των αντικειμένων, χωρίς να καταλαβαίνουμε πραγματικά πόσα είναι. Στην πραγματικότητα είναι μία διαδικασία αρίθμησης εύρεσης του σωστού πληθικού αριθμού ενός συνόλου. Η διεργασία της αρίθμησης περιγράφεται με τα εξής τρία στάδια.

- Προσδιορίζουμε ένα σύνολο
- Δείχνουμε κάποια στοιχεία του συνόλου και ταυτόχρονα λέμε τον αριθμό.
- Αφού αριθμήσουμε όλα τα στοιχεία και φτάσουμε στο τελευταίο, ο αριθμός αυτού θα είναι του συνόλου.

Ο ρόλος του εγκεφάλου στην αρίθμηση, βρίσκεται στο νεοφλοιό. Όμως πέρα από το νεοφλοιό, η μέτρηση ίσως σχετίζεται με το δεξί ημισφαίριο του εγκεφάλου. Τελικά δεν μπορούμε να ορίσουμε συγκεκριμένο μέρος του εγκεφάλου που να αντιστοιχεί στην αρίθμηση.

Από την προϊστορία μέχρι και το τρεις χιλιάδες π. Χ. εμφανίζονται κάποιες μορφές αρίθμησης στο ανθρώπινο είδος. Ο πρόγονος στον οποίο παρατηρήθηκε η πρώτη αρίθμηση, αρίθμηση με κλαδιά, ήταν ο *homo erectus* περίπου ένα εκατομμύριο πεντακόσιες χιλιάδες χρόνια (1.500.000) πριν. Η αρίθμηση με κλαδιά, η οποία στηριζόταν στην θεωρία της αναλογίας ένα προς ένα, ευνοήθηκε από τα εξής γεγονότα:

- Ο *homo erectus* κατασκεύαζε καταφύγια, ήταν παμφάγος και χρησιμοποιούσε τη φωτιά
- Αναζήτησε πιο εύκρατα κλίματα σε Ευρώπη και Ασία.
- Εγκαταστάθηκε σε αυτές τις χώρες και χρησιμοποιούσε την αρίθμηση με κλαδιά.

Ο αρχικός τρόπος αρίθμησης των ανθρώπων είναι η αρίθμηση με κλαδιά περίπου ένα εκατομμύριο πεντακόσιες χιλιάδες χρόνια (1.500.000) πριν, την οποία χρησιμοποίησε ο homo erectus. Η πορεία εξέλιξης της αρίθμησης με κλαδιά φαίνεται στο ακόλουθο σχεδιάγραμμα.

Αρίθμηση με κλαδιά → αρίθμηση με δάχτυλα → αρίθμηση με το σώμα → φωνητική αρίθμηση :

- Δυαδικό σύστημα
- Πενταδικό σύστημα
- Δεκαδικό σύστημα

Η δυαδική αρίθμηση, ένα πολύ περιορισμένο σύστημα αρίθμησης, αποτελείτο από την επανάληψη των φωνητικών λέξεων ένα και δύο. Λόγω των περιορισμένων χρήσεων της, εξελίχθηκε πολύ σύντομα σε πενταδική και αργότερα σε δεκαδική αρίθμηση.

Ο σκοπός που εφευρέθηκαν και αναπτύχθηκαν η γραφή, τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες συμπεραίνεται ότι είναι για την επίλυση των προβλημάτων της καθημερινότητας των ανθρώπων.

Πριν από δεκατρείς χιλιάδες χρόνια, οι άνθρωποι ξεκίνησαν να ασχολούνται με τις αγροκαλλιέργειες, επειδή οι άνθρωποι είχαν ανάγκη από σιτηρά, φύλασσαν σπόρους και γενικά βοηθούσαν και μεριμνούσαν για την ανάπτυξη τους. Το πρώτο χωριό με αγροκαλλιέργειες βρέθηκε στη νότια Τουρκία και στο βόρειο Ιράκ. Επειδή οι αγροκαλλιέργειες ποίκιλλαν ήταν εύκολη η μόνιμη παραμονή των ανθρώπων σε κάποιους τόπους.

Ο λαός των Σουμερίων εμφανίστηκε το 4.500 - 3.000 π. Χ. Δημιούργησαν μια αυτοκρατορία που διήρκεσε 1.500 χρόνια. Κατά την διάρκεια αυτής της περιόδου εμφανίστηκε το πρόβλημα ότι για να ακμάσουν οι πόλεις, έπρεπε να ανταλλάσουν εμπορεύματα. Κάθε φορτίο έπρεπε να συνοδεύεται από ένα έγγραφο ώστε να ξέρει ότι δεν τον κορόιδεψαν. Το «έγγραφο» αυτό αποτελούνταν από ένα σύνολο κουπονιών που προσδιόριζαν τον αριθμό και το είδος των αριθμών που μεταφέρονταν. Τα κουπόνια αυτά αποτελούν ένα σημαντικό επίτευγμα. Επίσης επινόησαν μία έξυπνη τεχνική για να φρουρούν τα κουπόνια. Τα κάλυπταν με πυλό και μετά τα έψηναν. Ακόμα έπρεπε να χαράζουν μία εικόνα ή να ζωγραφίζουν την εικόνα των κουπονιών που βρίσκονταν στο πυλό στην εξωτερική επιφάνεια πριν ψηθεί. Έτσι γεννήθηκε η γραφή. Τέλος οι Σουμέριοι ανέπτυξαν την σφηνοειδή γραφή με την οποία τα ιδεογράμματα των κουπονιών με την αριθμητική παραστατική γραφή αντικαταστάθηκαν με φωνητικά σύμβολα και αναπτύχθηκε ένα ξεχωριστό, αφηρημένο σύστημα αρίθμησης.

Τα κύρια χαρακτηριστικά των μαθηματικών των Σουμερίων είναι ότι έχουν ως βάση το εξήντα, με το δέκα να αποτελεί ενδιάμεσο βήμα καθώς χρησιμοποιούσαν και την μορφή των κλασμάτων. Οι Σουμέριοι μπορούσαν να δουλεύουν με πολύ μεγάλους και μικρούς αριθμούς, αφού χρησιμοποιούσαν τόσο ακέραιους όσο και κλάσματα.

Οι Βαβυλώνιοι εμφανίστηκαν περίπου το δύο χιλιάδες π. Χ. και περίπου έξι χρόνια μετά, το δύο χιλιάδες έξι π. Χ. πολιορκήσαν τη γη των Σουμερίων. Μετά από μια σειρά πολλών πολιορκιών κατάφεραν να κατακτήσουν τις περιοχές του σημερινού Ιράν, της Ιορδανίας και της Συρίας. Η αυτοκρατορία τους διήρκησε μέχρι το 538 π. Χ.

Από τους Σουμέριους κράτησαν τη σφηνοειδή γραφή και το βασικό σύστημα αρίθμησης τους. Αυτό το σύστημα είχε ως βάση το δέκα και το εξήντα και τα σύμβολα του ήταν η σφήνα και το άγκιστρο. Παρά το γεγονός αυτό οι Βαβυλώνιοι καινοτόμησαν χρησιμοποιώντας ένα καθοριζόμενο από τη θέση σύστημα με βάση το εξήντα.

Με αυτό το σύστημα οι Βαβυλώνιοι μπορούσαν να γράφουν πολύ μικρούς αλλά και πολύ μεγάλους αριθμούς, να υπολογίζουν το βάρος, την ποσότητα και το εμβαδό της γης. Ωστόσο, το καθοριζόμενο από τη θέση σύστημα αρίθμησης παρουσίαζε δύο μειονεκτήματα. Πρώτον, δεν υπήρχαν αριθμοί θέσης και δεύτερον η υποδιαστολή έλειπε.

Το βαβυλωνιακό σύστημα αρίθμησης περιελάμβανε πράξεις όπως :

- Πολλαπλασιασμό.
- Υπολογισμό τετραγώνων.
- Αντίστροφων αριθμών.
- Κύβων.
- Τετραγωνικών ριζών.
- Κυβικών ριζών.
- Πίνακες υπολογισμού τόκων.
- Πρόσθεση και πολλαπλασιασμό
- Συμβολισμό ποσοτήτων (όγκος, πλάτος, μήκος)
- Εξισώσεις με δύο αγνώστους και ορισμένες δευτεροβάθμιες

Τα επιτεύγματα των Σουμερίων και των Βαβυλωνίων είναι τα ακόλουθα:

- Εφηύραν τη γραφή
- Εισήγαγαν τα κλάσματα
- Ανέπτυξαν ένα καθοριζόμενο από τη θέση σύστημα αρίθμησης
- Αναβάθμισαν τα μαθηματικά από απλή αρίθμηση πραγμάτων (υπολογισμοί) σε επίλυση προβλημάτων (άλγεβρα) και σε μέτρηση μεγεθών (γεωμετρία)

Οι Αιγύπτιοι εμφανίστηκαν περίπου την πέμπτη χιλιετία π. Χ. και η αυτοκρατορία τους διήρκεσε μέχρι το 332 π. Χ. , περίπου τέσσερις χιλιετίες. Η ακμή του αιγυπτιακού πολιτισμού χρονολογείται από το 3.000 π. Χ. μέχρι το 2.500 π. Χ. Κατά την περίοδο αυτή τέθηκαν οι βάσεις των μαθηματικών.

Η ισχύς του αιγυπτιακού πολιτισμού εξασφάλισε στους Αιγυπτίους διάρκεια και σταθερότητα. Η αναπτυγμένη τους δύναμη οφείλεται στην άφθονη καλλιέργεια σιταριού κατά μήκος του Νείλου.

Δημιουργήθηκαν δύο νέα συστήματα γραφής από τους Αιγυπτίους. Το πρώτο ήταν τα ιερογλυφικά. Ξεκίνησαν απλά ως σύμβολα γύρω στο 3.000 επηρεασμένα από την σφηνοειδή γραφή των Σουμερίων. Χρησιμοποιήθηκαν σε επίσημα κείμενα μνημείων και ναών και στην καταγραφή των επιτευγμάτων των Φαραώ. Το δεύτερο ήταν η ιερατική γραφή. Ήταν λιγότερη επίσημη και περισσότερο αφηρημένη από τα ιερογλυφικά. Μέσω αυτής της γραφής συγκεντρώθηκαν με περισσότερες πληροφορίες για τα Αιγυπτιακά μαθηματικά.

Δύο πάπυροι περιέχουν παραδείγματα συνηθισμένων μαθηματικών πρακτικών προβλημάτων που αντιμετώπιζαν οι Αιγύπτιοι γραφείς .Ο πάπυρος Ριντ περιέχει τα ογδόντα τέσσερα προβλήματα, ενώ ο πάπυρος της Μόσχας διέθετε είκοσι πέντε. .Οι γραφείς αυτοί, χρησιμοποιούσαν την ιερατική γραφή για να συγγράψουν τους παπύρους.

Το αιγυπτιακό σύστημα αρίθμησης είχε ως βάση το 10. Στην ιερατική γραφή χρησιμοποιούνταν γραμμές για το 1 ως το 3 και ξεχωριστά σύμβολα για τους αριθμούς 4-9. Το σύστημα ήταν αυστηρά προσθετικό δηλαδή για να διαβαστεί ένας αριθμός έπρεπε να προστεθούν οι τιμές των διαφορετικών συμβόλων. Ωστόσο οι Αιγύπτιοι κατόρθωσαν να καταγράψουν αριθμούς που έφταναν σε εκατομμύρια.

Το σύστημα κλασμάτων ήταν δύσχρηστο. Με εξαίρεση τα κλάσματα $\frac{2}{3}$ και $\frac{3}{4}$ όλα τα κλάσματά τους ήταν μοναδιαία κλάσματα ή κλάσματα όπου ο αριθμητής ήταν το 1 και παρνομαστής οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός . Αυτό σήμαινε ότι οποιοδήποτε γνήσιο κλάσμα με αριθμητή μεγαλύτερο της μονάδας έπρεπε να

αναπαρασταθεί ως άθροισμα μοναδιαίων κλασμάτων . Για να κάνουν υπολογισμούς με μοναδιαία κλάσματα ,οι Αιγύπτιοι έπρεπε να χρησιμοποιούν πίνακες.

Όμως αυτό το σύστημα χαρακτήρων και συμβόλων είχε θετικές συνέπειες στην ανάπτυξη των μαθηματικών αφού το συγκεκριμένο σύστημα διευκόλυνε τη γραφή των μοναδιαίων κλασμάτων. Συγκεκριμένα χρειαζόταν να γράψουν μόνο τον παρονομαστή ενώ ήταν δύσκολο, να σχηματίσουν οποιοδήποτε άλλο κλάσμα πέρα από αυτά.

Αυτός ο τρόπος γραφής των κλασμάτων διήρκησε από την εποχή των Ρωμαίων έως τη μεσαιωνική περίοδο της Ευρώπης. Τα μαθηματικά των Αιγυπτίων αποτελούνταν από τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής, πολλαπλασιασμό, διαίρεση και ήταν από την φύση τους προσθετικοί. Οι Αιγύπτιοι στα μαθηματικά τους χρησιμοποιούσαν σύμβολα για διάφορους υπολογισμούς, όχι όμως σαν αυτά που χρησιμοποιούμε εμείς σήμερα .

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μετά από όλη αυτήν την διαδικασία διευρύναμε τους πνευματικούς μας ορίζοντες, αφού μάθαμε για την ιστορία των αριθμών και βελτιώσαμε το ομαδικό μας πνεύμα(αποκτήσαμε αλληλοκατανόηση, μάθαμε πως είναι να αναλαμβάνει κανείς ευθύνες και πόσο σημαντική είναι η διεκπεραίωσή τους για την ομαλή συνεργασία της ομάδας και ένα άρτιο τελικό αποτέλεσμα) και σκληραγωγηθήκαμε αφού μείναμε άυπνοι δύο μέρες με σκοπό την ολοκλήρωσή της. Ξεδιαλύναμε το μυστήριο γύρω από τον μύθο της αρίθμησης σε άλλες εποχές και μάθαμε τον τρόπο που η ίδια φύτρωνε στο ανθρώπινο πνεύμα. Ακόμα, γνωρίσαμε διάφορες υπολογιστικές μεθόδους και μας εντυπωσίασε η τάση της ανθρώπινης φύσης να ξεπερνά κάθε πρόβλημα που αντιμετωπίζει με το μεγαλειώδες μυαλό του.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν οι τρεις σπουδαίοι και πασίγνωστοι σε όλους μας αρχαίοι πολιτισμοί(Σουμέριοι, Βαβυλώνιοι και Αιγύπτιοι)και ο τρόπος που χρησιμοποιούσαν τα μαθηματικά στην εποχή τους. Είναι πραγματικά εντυπωσιακό το πώς οι πρωτόγονοι αυτοί άνθρωποι καταφέρνουν να χρησιμοποιούν τόσο προχωρημένους μαθηματικούς συλλογισμούς, σε τέτοιο βαθμό ώστε να τους θαυμάζουμε εμείς οι σημερινοί άνθρωποι που διανύουμε μια εποχή απίστευτης επιστημονικής εξέλιξης.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η εργασία μας για την ιστορία των αριθμών έφτασε αισίως στο τέλος της. Ελπίζουμε το περιεχόμενο της να ήταν αντάξιο των προσδοκιών σας και να σας κίνησε το ενδιαφέρον από την στιγμή που διαβάσατε τον τίτλο. Θα θέλαμε μέσα από την καρδιά μας να σας ευχαριστήσουμε θερμά για το ενδιαφέρον που δείξατε και για τον πολύτιμο χρόνο που αφιερώσατε έτσι ώστε να μπειτε στο μυαλό μας και να ανακαλύψετε τις γνώσεις μας, πλέον, για τα μαθηματικά. Είναι σημαντικό άτομα της δικής μας ηλικίας να ασχολούμαστε με δραστηριότητες πέρα του σχολικού προγράμματος και να έχουμε κάποιον άνθρωπο να επικροτεί την προσπάθειά μας και να καλλιεργεί το ενδιαφέρον μας με καινούρια πράγματα.

Στο τετράμηνο που πέρασε, τα μέλη της ομάδας μας συνεργαστήκαμε άρτια μεταξύ μας και παρ' όλο που στένευαν τα χρονικά περιθώρια κατορθώσαμε να ολοκληρώσουμε αυτήν την εργασία. Όλοι μαζί περάσαμε στιγμές χαράς, αγανάκτησης, απελπισίας. Οι δύσκολες στιγμές άγχους δεν ήταν τίποτα μπροστά στις πολυπληθέστερες στιγμές της ψυχικής μας ευεξίας. Εμείς θεωρούμε την προσπάθεια μας εξαιρετικά αξιόλογη.

Ευελπιστούμε να σας αφήσαμε την καλύτερη δυνατή εντύπωση και να αποκομίσατε από εμάς φρέσκιες γνώσεις που ήταν πραγματικά άξιες αποκόμισης. Η προσπάθεια που καταβάλλαμε αποδείχθηκε τελικά καρποφόρα αφού μέσα από την αναζήτηση οι απαντήσεις στα δεκάδες ερωτήματα πάνω στην αρίθμηση, ανακαλύψαμε τον άνθρωπο και το πόσο ευφυές πλάσμα ήταν από την προϊστορία. Τέλος, ευχόμαστε και εσείς να έχετε την ευκαιρία να ασχολείστε με ό,τι σας ενδιαφέρει περισσότερο και ότι πραγματικά εσείς θεωρείται ότι αξίζει για την ζωή σας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΑΝΤΛΗΣΑΜΕ ΤΟ ΥΛΙΚΟ ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ «Ο ΤΑΞΙΔΕΥΤΗΣ ΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ» ΤΟΥ CALVIN C. CLAWSON, ΣΕΛΙΔΕΣ 22-115