

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εξώφυλλο.....	0
2. Περιεχόμενα.....	1
3. Εισαγωγή.....	2
4. Στόχοι.....	3
5. Μεθοδολογία.....	4
6. Αρίθμηση.....	5
7. Σουμέριοι.....	13
8. Βαβυλώνιοι.....	15
9. Αιγύπτιοι.....	17
10. Αποτελέσματα.....	23
11. Συμπεράσματα.....	24
12. Επίλογος.....	25
13. Βιβλιογραφία.....	26
14. Παράρτημα.....	27

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σ' αυτό το τετράμηνο επιλέξαμε την ερευνητική εργασία με θέμα « Η ιστορία των αριθμών». Αναλύσαμε το συγκεκριμένο θέμα με βάση τη δράση των πρόγονών μας και μετέπειτα αυτή των Σουμέριων, των Βαβυλώνιων και των Αιγυπτίων. Αρχικά ασχοληθήκαμε με το τι είναι αρίθμηση και αν υπάρχει μέρος του εγκεφάλου που να ασχολείται με αυτή και φυσικά, με το ποιος πρόγονός μας ξεκίνησε να μετράει. Έπειτα, όσον αφορά τα συστήματα αρίθμησης, μελετήσαμε τον αρχικό τρόπο με τον οποίο αριθμούσαν καθώς και πότε έγινε αυτό το σημαντικό βήμα. Επίσης, ανακαλύψαμε την αιτία εξαιτίας της οποίας αναπτύχθηκε η αρίθμηση, η γραφή και οι φυσικές επιστήμες, καθώς και το χρόνο ανάπτυξης του δυαδικού και πενταδικού συστήματος. Αργότερα, μελετήσαμε τους Σουμέριους και τους Βαβυλώνιους, τον χώρο και το χρόνο που αναπτύχθηκαν και φυσικά τα μαθηματικά τους. Τέλος, ερευνήσαμε τους Αιγύπτιους -όσον αφορά το χώρο και το χρόνο που αναπτύχθηκαν- και τη συμβολή τους στην εξέλιξη των μαθηματικών.

ΣΤΟΧΟΙ

❖ ΑΡΙΘΜΗΣΗ

1. τι σημαίνει	6. χρησιμότητα γλώσσας στην αρίθμηση
2. πώς μετράμε	7. πόσο καιρό μετράμε
3. ποιες συλλογιστικές διεργασίες χρησιμοποιούνται	8. ποιος πρόγονος ξεκίνησε την αρίθμηση
4. μέρος εγκέφαλου – συγκεκριμένη περιοχή που χρησιμοποιείται	9. πότε ξεκίνησε να μετράει
5. εκ γενετής ή επίκτητη δεξιότητα	10. ευνοϊκές συνθήκες ανάπτυξης συστήματος αρίθμησης

❖ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

1. Αρχικός τρόπος αρίθμησης
2. Πότε πρωτοπαρατηρήθηκε
3. Από ποιους ανθρώπους
4. Χρονική και πρακτική πορεία εξέλιξης αρίθμησης
5. Χρόνος ανάπτυξης δυαδικού και πενταδικού συστήματος
6. Αιτία ανάπτυξης γραφής, μαθηματικών, φυσικών επιστημών
7. Ορόσημο οριοθέτησης πρώιμης-σημερινής γραφής και χρόνος

❖ ΣΟΥΜΕΡΙΟΙ- ΒΑΒΥΛΩΝΙΟΙ

1. Γεγονότα πριν 13000-11000 χρόνια	9. Αντιμετώπιση από Σουμέριους
2. Περιοχές που συνέβη	10. Απαρχή και πορεία γραφής
3. Αιτία αλλαγής τρόπου ζωής ανθρώπων	11. Μαθηματικά Σουμερίων
4. Καθημερινές ανάγκες ως βάση για υπολογισμούς	12. Περίοδος εμφάνισης Βαβυλωνίων, πού και για πόσο
5. Λύσεις που αναπτύχθηκαν	13. Στοιχεία Σουμερίων που διατηρήθηκαν
6. Περίοδος εμφάνισης Σουμερίων	14. Πλεονεκτήματα εξηταδικού συστήματος αρίθμησης
7. Εντυπωσιακό επίτευγμα Σουμερίων	15. Μειονεκτήματα Βαβυλωνιακού συστήματος αρίθμησης
8. Προϋπόθεση ακμής πόλεων	16. Μαθηματικά Βαβυλωνίων και επιτεύγματα Σουμερίων- Βαβυλωνίων

❖ ΑΙΓΥΠΤΙΟΙ

1. Περίοδος ανάπτυξης- ακμής	6. Διάρκεια γραφής κλασμάτων
2. Αιτία ισχύος Αιγυπτίων	7. Μαθηματικά Αιγυπτίων
3. Ποια και πόσα συστήματα γραφής ανέπτυξαν	8. Σύμβολο πρόσθεσης-αφαίρεσης
4. Πηγές πληροφόρησης- από πότε	9. Ανάγκες ανάπτυξης μαθηματικών
5. Αιγυπτιακό σύστημα αρίθμησης	10. Αιγυπτιακό ημερολόγιο
6. Γραφή κλασμάτων-δυσκολία	12. Συμπεράσματα – τρόπος γραφής προβλημάτων Αιγυπτίων/ Σουμερίων

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Καθεμία από τις τέσσερις ομάδες που ασχολήθηκαν με την αναζήτηση της ιστορίας των αριθμών στο πρώτο τετράμηνο ακολούθησαν ένα τρόπο με τον οποίο αναζητούσαν τις πληροφορίες και συνέθεταν την έκθεση. Η δική μας ομάδα «Νίτσες-Γοργονίτσες» ακολούθησε την εξής μέθοδο:

Αρχικά μας δινόταν η προβληματική από την καθηγήτρια, δηλαδή οι ερωτήσεις πάνω στο θέμα το οποίο ερευνούσαμε κάθε φορά, υποδειγματικά έτσι ώστε να κατανοήσουμε πάνω σε ποιο κομμάτι της εργασίας θα δουλέψουμε και τι πληροφορίες θα βρούμε.

Κατόπιν μας δινόταν, επίσης από την καθηγήτρια, τυπωμένο το κείμενο με τις πληροφορίες από την πηγή που χρησιμοποιήσαμε, στην προκειμένη περίπτωση από βιβλίο.

Στη συνέχεια χωρίζαμε τις ερωτήσεις σε τέσσερα μέρη, ένα μέρος για κάθε μέλος της ομάδας και η καθεμία από εμάς αναζητούσε τις απαντήσεις στις ερωτήσεις που επέλεξε να βρει.

Μετά, αφού βρίσκαμε όλες τις απαντήσεις στην προβληματική με συνεργασία όλων των μελών και με ερωτήσεις στην καθηγήτρια προσπαθούσαμε να συνθέσουμε την έκθεση μέσα σε συγκεκριμένο αριθμό δώρων που είχαμε ορίσει. Στο τέλος, αφού είχαμε δημιουργήσει ένα κομμάτι της έκθεσης το υπόλοιπο αναλάμβανε ένα μέλος της ομάδας, διαφορετικό κάθε φορά, να το πληκτρολογήσει στον υπολογιστή.

Αφού ετοιμάζαμε και την έκθεση φτιάχναμε ένα χαρτόνι που θα μας βοηθούσε στην παρουσίαση της κάθε έκθεσης ξεχωριστά στις υπόλοιπες τρεις ομάδες.

Τέλος, παρουσιάζαμε την κάθε έκθεση μπροστά στις άλλες ομάδες και την καθηγήτρια ώστε να είμαστε πιο προετοιμασμένοι για την παρουσίαση της τελικής έκθεσης.

Στα τελευταία τρία δώρα που μας απέμειναν: πρώτα προετοιμάσαμε την τελική έκθεση και ανέλαβε η καθεμία να φτιάξει από ένα κομμάτι αυτής ώστε να τα ενώσουμε και να πάρει την τελική της μορφή, έπειτα με βάση πια την τελική έκθεση φτιάξαμε το PowerPoint ως βοηθητικό εργαλείο στην τελική παρουσίαση ολόκληρης της δουλειάς μας και τέλος υπό την επίβλεψη των υπόλοιπων ομάδων και της καθηγήτριας αναπτύξαμε όλα αυτά που είχαμε βρει στην τελική παρουσίαση.

ΑΡΙΘΜΗΣΗ

Η αρίθμηση με τα δάχτυλα ονομάζεται αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, όπου κάθε δάχτυλο αντιστοιχίζεται με μία μόνο λέξη. Η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση – συνάρτηση είναι η διαδικασία της εκχώρησης ενός στοιχείου από ένα σύνολο σε κάθε στοιχείο 2^{ου} συνόλου. Από την παιδική μας ηλικία μάθαμε να αντιλαμβανόμαστε τα πράγματα σε σύνολα και καταλάβαμε ότι κάθε σύνολο διαθέτει ένα πλήθος στοιχείων, το οποίο προσδιορίζεται από τον πληθικό του αριθμό. Επίσης, μάθαμε πως διαφορετικά σύνολα μπορούν να έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό ή διαφορετικούς πληθικούς αριθμούς. Αυτή είναι μια εκπληκτική συλλογή δεξιοτήτων.

Για μια πλήρη πράξη της αρίθμησης χρειάζεται να γνωρίζουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου και ύστερα αγγίζουμε ή δείχνουμε με το δάχτυλό μας το κάθε στοιχείο του συνόλου. Εφόσον τελειώσουμε αυτές τις διεργασίες η αρίθμησης μας θα έχει ολοκληρωθεί.

Γνωρίζουμε πως οι επιστήμονες τόσα χρόνια δεν έχουν κατορθώσει να προσδιορίσουν τη συγκεκριμένη περιοχή του εγκεφάλου μας, που να αντιστοιχεί με αυτό που ονομάζεται συνείδηση. Επίσης, μετά από εξετάσεις εγκεφαλικών τραυμάτων, επιστήμονες κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει ένα μέρος του εγκεφάλου που είναι επιφορτισμένο με τη συνείδηση. Έτσι, θα πρέπει να παρατηρήσουμε πιο προσεκτικά τον εγκέφαλο, ώστε να ανακαλύψουμε που θα βρίσκονταν οι αριθμητικές μας δεξιότητες.

Ξέρουμε ότι ο εγκέφαλος είναι η υδατώδης μάζα των ιστών στο εσωτερικό του κρανίου μας, όπου είναι υπεύθυνη για τον έλεγχο του σώματός μας και τη διασφάλιση κατοικίας για τις σκέψεις μας. Χωρίζεται σε τρία μέρη: στο εγκεφαλικό στέλεχος, την παρεγκεφαλίδα και το νεοφλοιό στην κορυφή του εγκεφάλου. Αποτελεί την έδρα της μνήμης, της μάθησης και των πνευματικών δεξιοτήτων. Η εξωτερική επιφάνεια του νεοφλοιού, η οποία ονομάζεται φαιά ουσία, αποτελείται από ένα λεπτό στρώμα δέκα περίπου δισεκατομμυρίων νευρώνων. Στη περιοχή της φαιάς ουσίας, είναι τόσο πυκνά στοιβαγμένοι οι νευρώνες, με αποτέλεσμα ένα κυβικό χιλιοστό περιέχει από 30 έως 100 χιλιάδες σώματα νευρώνων. Ο φλοιός χωρίζεται στη μέση από μια μεγάλη σχισμή, η οποία ξεκινάει από το μέτωπο και φτάνει ως το πίσω μέρος του εγκεφάλου. Μια δέσμη διακοσίων εκατομμυρίων αξόνων η οποία ονομάζεται μεσολόβιο, συνδέει μεταξύ τους τα δύο μισά του νεοφλοιού. Κάποιες εγκεφαλικές λειτουργίες φαίνεται να είναι εντοπισμένες σε συγκεκριμένες περιοχές, ενώ άλλες μοιάζει να απλώνονται σε μεγάλες περιοχές του νεοφλοιού. Η αριστερή πλευρά του νεοφλοιού

συνδέεται με διαδοχικές λειτουργίες και κυριαρχεί στις συμβολικές και αφηρημένες διεργασίες, γι' αυτό της αποδίδουμε τις μαθηματικές πράξεις. Αν καταστραφεί μια περιοχή αριστερή πλευρά του εγκεφάλου, μπορεί να προκαλέσει το σύνδρομο Γκερσμαν ένα σύνδρομο που συνεπάγεται την απώλεια της ικανότητας του ασθενούς να αναγνωρίσει τα δάχτυλα του, να τα κινήσει, έχει την έλλειψη προσανατολισμού αναφορικά με την δεξιά και την αριστερή κατεύθυνση και δεν μπορεί να κάνει απλούς αριθμητικούς υπολογισμούς.

Όταν γεννιόμαστε δεν έχουν σχηματιστεί όλες οι νευρικές συνάψεις στον εγκέφαλό μας. Στην αρχή, οι εγκεφαλικές λειτουργίες μας δεν είναι σαφώς διαχωρισμένες ανάμεσα στην αριστερή και τη δεξιά πλευρά. Επομένως όταν είμαστε μόνο λίγων εβδομάδων δεν μπορούμε να μάθουμε να μετράμε γιατί πολλοί λίγοι νευρώνες έχουν σχηματίσει τις τελικές συνδέσεις τους. Στην ηλικία των δυο-δύο ετών αρχίζουμε να συναρμολογούμε τα διαφορετικά μέρη που θα μας οδηγήσουν στην αρίθμηση και την αίσθηση των αριθμών και όσο μεγαλώνουμε οι γονείς μας βοηθάνε να μετράμε. Αυτό γίνεται γιατί οι λεκτικές και κινητικές δεξιότητες έχουν αναπτυχθεί ώστε να μπορούμε να καθόμαστε και να ακούμε τους γονείς. Η αρίθμηση είναι μία εμπρόθετη πράξη για εμάς, διότι προσπαθούμε να θυμηθούμε τη σωστή αριθμητική λέξη και να την πούμε δείχνοντας το σωστό δάχτυλο.

Κάθε αριθμός περιλαμβάνει τη συνειρμική μνήμη του επόμενου αριθμού της ακολουθίας. Αρχικά, οι μνήμες αυτές είναι έντονες ενώ αργότερα κυριαρχούν οι ηχητικές και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σωστές προφορικές αριθμητικές λέξεις. Οι κινητικές μνήμες συνδέονται συνειρμικά με τους αριθμούς και προέρχονται από το τι δείχνουμε, δηλαδή τη δραστηριότητα των δαχτύλων. Αυτό, δηλαδή η κίνηση των δαχτύλων, συμβαίνει ακόμα και όταν είμαστε ενήλικοι και μετράμε με το νου.

Παρά το γεγονός ότι μαθαίνουμε πώς να μετράμε, οι εγκεφαλικές λειτουργίες είναι αυτές που μας επιτρέπουν να το μάθουμε, οπότε καταλαβαίνουμε πως τελικά αποτελούν μέρος της βιολογικής κληρονομιάς μας. Το να αναρωτιόμαστε πόσα αντικείμενα υπάρχουν γύρω μας, φαίνεται πως είναι κληρονομικό και υπάρχει σε όλους τους ανθρώπους. Συνεπώς, το ερώτημα «πόσα είναι;» είναι θαμμένο στην ανθρώπινη φύση.

Σίγουρα δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε κάποια γλώσσα για να έχουμε την αίσθηση των αριθμών, γιατί την έχουν τόσο τα ζώα όσο και οι άνθρωποι. Ο Ντέιβιντ Γ. Σμιθ στο έργο «Η ιστορία των μαθηματικών» αναφέρει μια πολύ γνωστή περίπτωση κωφάλαλου αγοριού που απέκτησε γνώση των αριθμών παρατηρώντας τα δάχτυλά του, πριν ακόμα διδαχτεί να μετράει. Αυτό δείχνει ότι η έννοια του αριθμού δε χρειάζεται την ανάπτυξη της προφορικής γλώσσας.

Η αρίθμηση είναι πολύ παλαιότερη από την καταγεγραμμένη ιστορία αλλά και από τη γραπτή γλώσσα η οποία ξεκίνησε από τη Μέση Ανατολή πριν 5000 χρόνια. Η εμφάνισή της προσδιορίζεται στην προϊστορική περίοδο. Πιθανότατα ξεκίνησε μετά την εποχή του

διαχωρισμού της εξελικτικής γραμμής σε ανθρώπους και πιθήκους, που συνέβη πέντε με έξι εκατομμύρια χρόνια πριν και διήρκησε έως το 3000 π.Χ .

Έχουν ανακαλυφθεί πολλά απολιθώματα ζώων που μοιάζουν και με ανθρώπους και με πιθήκους, τα οποία οι ανθρωπολόγοι τα έχουν ταξινομήσει σε διάφορες ομάδες η καθεμία εκ των οποίων έχει ξεχωριστά χαρακτηριστικά που δείχνουν την εξέλιξη από την ευφυΐα των ζώων στην ανθρώπινη ευφυΐα. Τα ζώα αυτά ονομάζονται ανθρωποειδή.

Τα παλαιότερα ανθρωποειδή είναι οι Αυστραλοπίθηκοι της Αφρικής, η ύπαρξη των οποίων χρονολογείται από τέσσερα μέχρι ενάμισι εκατομμύριο χρόνια πριν. Το κυριότερο χαρακτηριστικό που τους χωρίζει από τους σημερινούς πιθήκους και τις μαϊμούδες είναι ότι βαδίζουν σε όρθια στάση. Δεν υπάρχουν αποδείξεις ότι κατασκεύαζαν εργαλεία ή ότι χρησιμοποιούσαν τη φωτιά, όπως έκαναν τα μεταγενέστερα ανθρωποειδή και έτσι υποδηλώνεται ότι δεν είχαν την ικανότητα να αντιλαμβάνονται το ερώτημα «πόσα είναι;» , επομένως δε μετρούσαν.

Το αμέσως επόμενο ανθρωποειδές είναι ο Homo habilis ή Επιδέξιος Άνθρωπος (ονομάστηκε έτσι επειδή κατασκεύαζε λίθινα εργαλεία). Ο εγκέφαλός του ήταν μεγαλύτερος από αυτόν του αυστραλοπίθηκου ωστόσο έμοιαζε πολύ με αυτόν. Εξακολουθούμε να μη συναντάμε τη χρήση της φωτιάς και καθώς κατοικούσε στην ανατολική και νότια Αφρική έβρισκε τροφή όλο το χρόνο λόγω του σταθερού κλίματος και δε χρειαζόταν να συσσωρεύσει για αργότερα. Επομένως είναι πιθανό να μη χρειαζόταν την αρίθμηση. Επιπλέον, παρά το γεγονός ότι είχε μεγαλύτερο εγκέφαλο από τον αυστραλοπίθηκο δεν υπάρχουν αποδείξεις ότι είχε γρήγορη φωνητική ομιλία.

Ενάμισι εκατομμύριο χρόνια πριν εμφανίστηκε ο Homo Erectus ή Όρθιος Άνθρωπος, ο οποίος επέζησε μέχρι περίπου 300.000 χρόνια πριν. Αποτελεί μια αξιοσημείωτη πρόοδο σε σχέση με τα προηγούμενα είδη. Κάποια χαρακτηριστικά του είναι πως είχε μεγαλύτερο εγκέφαλο από τον Homo habilis, χρησιμοποιούσε τη φωτιά καθώς και μετανάστευσε στην Ευρώπη και την Ασία. Επειδή άλλαξε σημαντικά στα 1,2 εκατομμύρια χρόνια της ύπαρξής του, αυτός ο πολιτισμός διαχωρίζεται σε περιόδους αρχικού και μεταγενέστερου Homo Erectus. Ο εγκέφαλος του πρώτου ήταν αρκετά μεγαλύτερος από του Homo habilis ενώ του δεύτερου πλησίαζε κατά πολύ το μέσο όρο του μεγέθους του εγκεφάλου του σύγχρονου ανθρώπου. Δεν υπάρχουν αποδείξεις για γρήγορη φωνητική ομιλία. Άρα δε μετρούσε χρησιμοποιώντας τις σύγχρονες αριθμητικές λέξεις. Επιπλέον δεν υπάρχει κάποιο στοιχείο που να δείχνει ότι ο Homo erectus μετρούσε με κλαδιά. Έμμεσα στοιχεία που υποδηλώνουν την αρίθμηση με κλαδιά είναι πρώτον το γεγονός ότι είχε μεγάλο εγκέφαλο και δεύτερον ότι κατασκεύαζε πολύπλοκα εργαλεία.

Καθώς μετακινήθηκε από το θερμό κλίμα της Αφρικής προς το εποχικά μεταβαλλόμενο κλίμα της Ευρώπης και της Ασίας, ήταν υποχρεωμένος να επιζήσει στον κρύο χειμώνα άρα συσώρευε αποθέματα τροφίμων. Ίσως αυτή να ήταν η πρώτη περιβαλλοντική πίεση που ενθάρρυνε την αρίθμηση με κλαδιά. Επίσης άλλα προβλήματα που ενθάρρυναν την ανάπτυξη της αρίθμησης ήταν για παράδειγμα «σε πόσες μέρες είχε πανσέληνο (και άρα θα μπορούσαν να κυνηγήσουν τη νύχτα);» και άλλα. Η αρίθμηση με κλαδιά είναι απίθανο να αναπτύχθηκε ταυτόχρονα σε όλες τις φυλές του Homo erectus. Ίσως να αναπτύχθηκε σε διάφορες περιοχές, να εξαφανίστηκε και να εμφανίστηκε αργότερα.

Πριν από περίπου 500.000 χρόνια εμφανίστηκε στην Ευρώπη, την Ασία και την Αφρική ο Homo sapiens ή Έμφρων Άνθρωπος. Το μέγεθος του εγκεφάλου του αυξήθηκε πλησιάζοντας το μέγεθος του εγκεφάλου του σύγχρονου ανθρώπου. Αποτελεί ένα μεταβατικό στάδιο μεταξύ του Homo erectus και του σύγχρονου ανθρώπου. Αφού ο Homo erectus χρησιμοποιούσε την αρίθμηση, σίγουρα τη χρησιμοποιούσε και ο Homo sapiens. Ο πιο πολύπλοκος εγκεφάλός του τον έκανε πιο δεκτικό στην ανάπτυξη νοητικών δεξιοτήτων. Υπάρχουν στοιχεία ότι όντως χρησιμοποιούσε κάποιο είδος ομιλίας που βασιζόταν σε μια περιορισμένη γκάμα φωνητικών ήχων.

Τελευταία είναι η εμφάνιση του σύγχρονου ανθρώπου του Homo sapiens sapiens που χρονολογείται από κάποιους 30-35 χιλιάδες χρόνια πριν και από κάποιους άλλους 100.000 χρόνια πριν. Οι τελικές αλλαγές περιλαμβάνουν το δικό μας μεγάλο εγκεφαλο, έναν πλήρως ανεπτυγμένο λάρυγγα και λαιμό για γρήγορη ομιλία. Επιπλέον κατασκευάζουμε περίπλοκα εργαλεία, θάβουμε τους νεκρούς μας και δημιουργούμε τέχνη. Γενικά, η εξέλιξη από το Homo sapiens στο Homo sapiens sapiens έγινε περίπου πεντακόσιες με εκατό χιλιάδες πριν.

Η αρίθμηση είναι πιθανό να ξεκίνησε όταν ο πρωτόγονος άνθρωπος άρχισε να μετρά ορισμένες ομάδες αντικειμένων κάνοντας χαραγές στο χώμα ή σε πέτρες. Το είδος του ανθρώπου αυτού, σύμφωνα με τους ανθρωπολόγους, ήταν ο Homo erectus, ο οποίος εμφανίστηκε πριν από ενάμισι εκατομμύρια χρόνια και έζησε μέχρι περίπου 300.000 χρόνια πριν. Η κοινωνία είχε εξελιχθεί και ήταν απαραίτητη η αρίθμηση για να μοιράσουν την τροφή και άλλα. Η διαδικασία ήταν μια μέθοδος καταγραφής που βασιζόταν στην αρχή της αντιστοιχίας ένα προς ένα και πιθανόν αποτέλεσε την αρχή της γραφής. Υποθέτουμε πως οι άνθρωποι για να μετρήσουν δίπλωναν ένα δάχτυλο για κάθε αντικείμενο. Για μεγαλύτερα σύνολα μάζευαν βότσαλα, ξύλα ή έκαναν χαραγές στο χώμα ή σε πέτρες.

Η αρίθμηση με τα δάχτυλα είναι οικουμενική, αφού τη χρησιμοποιούν άνθρωποι σε όλα τα μέρη του κόσμου. Ωστόσο, έχει 2 μειονεκτήματα. Πρώτον, τα δάχτυλα είναι περιορισμένα σε αριθμό και δεύτερον δεν είναι βολικά ως αρχείο. Οι κοινωνίες εξακολούθησαν να τη χρησιμοποιούν ακόμα και μετά την καθιέρωση της σύγχρονης αριθμητικής ακολουθίας. Για παράδειγμα οι

Ρωμαίοι τη χρησιμοποιούσαν για να μετρούν ως το δέκα χιλιάδες. Η αρίθμηση με τα δάχτυλα αποτελεί σημαντική πρόοδο για την έννοια του αριθμού. Όταν χρησιμοποιούμε τα δάχτυλα, καθώς δεν είναι ίδια μεταξύ τους και έχουν διαφορετική ονομασία, μετρώνται με διαφορετική σειρά. Έτσι μας δίνεται η δυνατότητα να εισάγουμε τους συντεταγμένους αριθμούς, δηλαδή αυτούς που δείχνουν τη σειρά ενός στοιχείου μέσα στο σύνολο, στην αρίθμηση αυτή και έτσι γεννιέται η αριθμητική ακολουθία.

Στη συνέχεια, εμφανίστηκε η αρίθμηση με το σώμα, στην οποία όταν μετράμε δείχνουμε πρώτα τα δάχτυλα και μετά άλλα μέρη του σώματος. Κατάλοιπα αυτής της αρίθμησης συναντάμε στην Αυστραλία και τη Νέα Γουινέα. Η αρίθμηση με το σώμα ήταν πολύ χρήσιμη για το συντονισμό μιας ομάδας κυνηγών ή πολεμιστών μιας φυλής από απόσταση χωρίς τη χρήση ήχου.

Οι δύο αριθμήσεις, με τα δάχτυλα και με το σώμα, συνέβαλαν στη μετακίνηση προς την αφηρημένη έννοια των αριθμών – η οποία δεν υπήρχε όταν πρωτοπροσδιορίστηκαν οι αριθμοί με λεκτικά ονόματα, αλλά οι αριθμοί χρησιμοποιούνταν για να περιγράψουν φυσικά αντικείμενα που μετριούνταν, π.χ. στα αγγλικά λέμε a yoke of oxen (=ένα ζευγάρι βόδια) αλλά δε λέμε a yoke of gloves – αφού μας δίνουν και συντεταγμένους και πληθικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, αν ρωτήσουμε έναν αγρότη πόσα μήλα έχει στο καλάθι, αν μας δείξει ένα μάτσο κλαδιά θα καταλάβουμε μόνο τον πληθικό αριθμό τους, ενώ αν μας δείξει ένα μέρος του σώματός του μπορούμε να γνωρίζουμε τη σχετική θέση του αριθμού σε σχέση με τα άλλα μέρη του σώματος που αναπαριστούν αριθμούς.

Στο τέλος, εμφανίστηκε η αρίθμηση με λέξεις, η οποία είναι πιο αφαιρετική για τους ανθρώπους. Όταν χρησιμοποιούμε την αρίθμηση με κλαδιά ή με το σώμα δεν υπάρχουν πραγματικά αφηρημένοι αριθμοί γιατί η διαδικασία που χρησιμοποιείται είναι μηχανική και δεν απαιτεί αφηρημένη σκέψη. Από τη στιγμή που εκφέρουμε έναν ήχο για να αναπαραστήσουμε έναν αριθμό, τότε έχει αρχίσει η αφαίρεση.

Οι αριθμητικές λέξεις δεν εμφανίστηκαν μόλις οι άνθρωποι χρησιμοποίησαν τη γρήγορη φωνητική γλώσσα περίπου 100.000 χρόνια πριν. Η ανάπτυξη των αριθμητικών λέξεων ήταν αργή και σταδιακά προχώρησε μέχρι το σημερινό δεκαδικό σύστημα. Η εξέλιξή τους καθυστέρησε γιατί ο Homo-sapiens-sapiens είχε εξαιρετικά καλές μεθόδους για τον προσδιορισμό του πληθικού αριθμού των συνόλων μέσω της αρίθμησης με κλαδιά ή με δάχτυλα.

Στο μεγάλο διάστημα της ιστορίας μας, οι άνθρωποι ήταν ‘κυνηγοί-τροφοσυλλέκτες’, δηλαδή μάζευαν καρπούς και κυνηγούσαν ζώα. Αυτό αποτελούσε τον τρόπο ζωής τους για 1,5 εκατομμύρια χρόνια. Σύμφωνα με έρευνα σε σύγχρονους ‘κυνηγούς-τροφοσυλλέκτες’ ανακαλύφθηκε ότι έχουν περισσότερο χρόνο από τους ανθρώπους των αστικών κοινωνιών και δε ζουν στα όρια της λιμοκτονίας όπως θα μπορούσαμε να φανταστούμε, αντίθετα με μια δημοφιλή υπόθεση που υποστηρίζει πως όταν οι άνθρωποι εγκαταστάθηκαν σε αστικές κοινωνίες είχαν πολύ ελεύθερο χρόνο ώστε να εφεύρουν τα μαθηματικά, και τις φυσικές επιστήμες. Έτσι, συμπεραίνουμε

πως και οι 'κυνηγοί-τροφοσυλλέκτες' θα μπορούσαν να τα είχαν εφεύρει νωρίτερα αφού τελικά είχαν περισσότερο χρόνο. Άρα δεν ήταν ο ελεύθερος χρόνος που οδήγησε τους ανθρώπους στην εφεύρεση πραγμάτων αλλά τα καθημερινά προβλήματα που είχαν να αντιμετωπίσουν. Η γραφή, τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες εφευρέθηκαν, λοιπόν, με σκοπό την επίλυση των προβλημάτων που συνάντησαν οι άνθρωποι, όπως για παράδειγμα η γεωργία που ξεκίνησε πριν από 11 χιλιάδες χρόνια.

Πολλές πρωτόγονες φυλές από την Αφρική ως τη Νότια Αμερική και τη Νέα Γουινέα, είχαν μόνο δύο αριθμητικές λέξεις, το ένα και το δύο, ωστόσο δεν θα πρέπει να υποθέσουμε πως η κατανόηση και η χρήση των αριθμών περιορίζεται στον αριθμό των αριθμητικών λέξεων που υπάρχουν στη γλώσσα τους. Τις δύο αυτές λέξεις τις συνδυάζαν για να μετρήσουν μεγαλύτερες ομάδες σε αυτό που είναι γνωστό ως δυαδική αρίθμηση. Στην αρίθμηση αυτή επαναλαμβάνουμε τις αριθμητικές λέξεις που αντιστοιχούν στο ένα και το δύο, όσες φορές χρειάζεται. Η καθαρή δυαδική αρίθμηση χρησιμοποιεί την αρχή της πρόσθεσης (π.χ. τέσσερα: δύο-δύο). Φαίνεται δηλαδή πως οι 'κυνηγοί-τροφοσυλλέκτες', που ζούσαν πάνω από 30.000 χρόνια πριν κατανοούσαν την αρχή της πρόσθεσης μικρών φυσικών αριθμών. Αυτός που χρησιμοποιεί τη δυαδική αρίθμηση συνοδεύει την προφορική σε συνδυασμό με την αρίθμηση με τα δάχτυλα, γιατί η σειρά λέξεων που χρειαζόταν για μεγάλους αριθμούς ήταν πολύ δύσκολη να τη θυμάται. Έτσι, το σύστημα αυτό είναι περιορισμένο και λιγότερο αποτελεσματικό και χρήσιμο σε σχέση με την αρίθμηση με κλαδιά, αφού μπορεί να αντικατασταθεί εύκολα από την αρίθμηση με τα δάχτυλα.

Λόγω των διάφορων τοποθεσιών στην Αφρική, την Αυστραλία και τη Νότια Αμερική, όπου ανακαλύφθηκε η δυαδική αρίθμηση, δε γνωρίζουμε αν αναπτύχθηκε σε όλα τα μέρη ταυτόχρονα. Όμως, είναι σίγουρα πολύ παλιά.

Επόμενο στάδιο της δυαδικής είναι η νεοδυαδική αρίθμηση, η οποία συμπεριλαμβάνει τον πολλαπλασιασμό κάποιων αριθμών για να προκύψουν κάποιοι μεγαλύτεροι και συναντάται σε διάφορα μέρη του κόσμου κοντά σε περιοχές που συναντάται η δυαδική αρίθμηση. Μπορούμε να πούμε, λοιπόν, πως οι 'κυνηγοί-τροφοσυλλέκτες' κατανοούσαν και τον πολλαπλασιασμό μικρών φυσικών αριθμών.

Το επόμενο σκαλοπάτι της εξέλιξης των αριθμητικών λέξεων είναι η πενταδική αρίθμηση, η οποία πιθανόν προέκυψε από τον αριθμό των δαχτύλων του χεριού. Στις περισσότερες ηπείρους έχουν ανακαλυφθεί διάφορες εκδοχές της πενταδικής αρίθμησης. Το σύστημα αυτό εξελίχθηκε σε δύο διαφορετικά είδη αρίθμησης: την πενταδική-δεκαδική και την πενταδική-εικοσαδική. Το πενταδικό-εικοσαδικό σύστημα μπορεί να είναι παλιότερο. Τα 2 συστήματα συνδυάζονταν με διάφορους τρόπους. Οι λέξεις ήταν συχνά ονόματα ή συνδυασμοί ονομάτων των δαχτύλων, των μελών του σώματος ή και διάφορων χειρονομιών που χρησιμοποιούνταν στην αρίθμηση. Στοιχεία αυτού βλέπουμε στο σύγχρονο σύστημα αρίθμησης, στο οποίο οι αριθμοί λέγονται ψηφία (digitals) που προέρχεται από το λατινικό *digitus* (=δάχτυλο).

Το παλιότερο στοιχείο που έχουμε σχετικά με την αρίθμηση είναι ένα κόκαλο λύκου τριάντα χιλιάδων ετών, το οποίο ανακαλύφθηκε στην Τσεχοσλοβακία από το δόκτορα Καρλ Άμπσολον. Επάνω του υπάρχουν πενήντα εγκοπές ομαδοποιημένες ανά πέντε. Αυτό το κόκαλο υποδηλώνει τη χρήση ενός πενταδικού συστήματος αρίθμησης. Επομένως οι προϊστορικοί ‘κυνηγοί-τροφοσυλλέκτες’ εκτός από το πενταδικό σύστημα αρίθμησης μπορεί να είχαν ανακαλύψει και τα παλαιότερα συστήματα δυαδικής και νεοδυαδικής αρίθμησης.

Σε διάστημα περίπου 13000 ετών πριν ξεκίνησε η χρήση ξύλινων ράβδων στις οποίες ήταν ενσωματωμένοι κοφτεροί πυρόλιθοι με σκοπό να καταφέρνουν να θερίζουν τα άγρια σιτηρά. Οι άνθρωποι είχαν τη δυνατότητα να μπορούν να αποθηκεύουν τους σπόρους των σιτηρών στο πίσω μέρος των σπηλαίων ώστε να τα χρησιμοποιήσουν αργότερα. Από τη στιγμή που τους φύλασσαν για να τους φυτέψουν τον επόμενο χρόνο, έπρεπε να επιλέξουν τους καλύτερους από αυτούς και έτσι οι μελλοντικές σοδειές άλλαζαν αφού η καλλιέργεια ήταν επιλεκτική.

Η παλαιότερη αγροκαλλιέργεια εμφανίστηκε περίπου το 11000π.Χ στη Γόνιμη Ημισέληνο δηλαδή στην περιοχή που εκτείνεται από την αρχαία Ιεριχώ, στη δυτική όχθη του Ισραήλ έως βόρεια τη Δαμασκό και το Χαλέπι στη Συρία και νοτιοανατολικά έως τη Βαγδάτη και τη Βασόρα του Ιράκ ακόμα και ως τα Σούσα έναν αρχαιολογικό χώρο στο Ιράν. Το πρώτο χωριό με αγροκαλλιέργειες εμφανίστηκε στη νότια Τουρκία και στο βόρειο Ιράκ.

Οι κυνηγοί τροφοσυλλέκτες βασιζόνταν στο κυνήγι θηραμάτων καθώς και στην άγρια βλάστηση. Γι’ αυτό το λόγο οργανώνονταν σε μικρές ομάδες που περιπλανιόνταν σε μεγάλες εκτάσεις. Οι αγροκαλλιέργειες, ωστόσο, που πραγματοποιούνταν με εξημερωμένα ζώα και επιλεγμένους σπόρους, συνέβαλλαν στην κάλυψη των αναγκών μεγαλύτερου αριθμού ανθρώπων σε αντίθεση με τον τρόπο ζωής των κυνηγών-τροφοσυλλεκτών. Το πλεονέκτημα αυτό των αγροκαλλιεργειών επέτρεπε την παραμονή ενός πληθυσμού σε ένα μέρος και την κατασκευή μόνιμων κατοικιών, αλλά μόνο στην περίπτωση που οι σπόροι είναι προφυλαγμένοι και μετρήσιμοι σε ποσότητα.

Η καλλιεργούμενη γη έπρεπε κι αυτή να προφυλαχθεί αλλά και να μοιραστεί σωστά. Με την καλλιέργεια εδραιώθηκε η σχέση μεταξύ φυσικών αριθμών και μέτρησης. Εκτός όμως από την διαχείριση των αγρών και των σοδειών, έπρεπε να υπάρχει και σωστή και αποτελεσματική οργάνωση των ανθρώπων για να φυτεύουν, να καλλιεργούν και να θερίζουν και ύστερα όπως επίσης και να είναι έτοιμοι να αποκρούσουν οποιαδήποτε επιδρομή και αν δέχονταν. Αφού χρειάζονταν περισσότερο από την απλή αρίθμηση, άρχιζαν να πλέκουν τους γραμματικούς και τους ιερείς να προσθέτουν, να πολλαπλασιάζουν, να αφαιρούν και να διαιρούν. Έτσι, αναπτύχθηκε μια άρχουσα τάξη, της οποίας οι γραμματικοί υπολόγιζαν τους φόρους των ατόμων και των νοικοκυριών.

Επιπλέον, οι αγρότες χρειάζονταν ένα ημερολόγιο για να προσδιορίζουν την κατάλληλη εποχή που θα φύτευαν καθετί. Αυτό απαιτούσε περισσότερες υπολογιστικές δεξιότητες για την παρακολούθηση των θέσεων των άστρων και το σχεδιασμό των μελλοντικών θέσεων τους. Παράδειγμα τέτοιου είναι το αρχαίο βαβυλωνιακό έτος το οποίο άρχιζε με την εαρινή ισημερία. Οι Σουμέριοι ένας ακόμα πιο αρχαίος λαός μπορεί να είχαν καθιερώσει το δικό τους ημερολόγιο γύρω στο 5700π.Χ. Για τη διατήρηση των αριθμητικών αρχείων αναπτύχθηκαν 3 διαφορετικές λύσεις: οι ράβδοι με εγκοπές, τα σκοινιά με κόμπους και τα πήλινα κουπόνια ή μάρκες.

Οι ράβδοι με εγκοπές ήταν κόκαλα ή ξύλινες ράβδοι που είχαν βαθμολογηθεί ή χαραχτεί σκόπιμα, έτσι ώστε να υποδηλώνουν αριθμούς. Παράδειγμα είναι ένα κόκαλο που ανακαλύφθηκε σ' ένα ψαρότοπο στη λίμνη Έντουαρντ στο Ζαΐρ το οποίο χρονολογείται μεταξύ 9000-6500π.Χ. Οι περισσότερες ράβδοι με εγκοπές είναι ξύλινες και χρησιμοποιούνταν για να καταγράφουν τα αγαθά, τις συναλλαγές και τα συμβόλαιά τους. Για την καταγραφή των χρεών, δημοφιλής ήταν η διπλή ράβδος με εγκοπές. Οι ράβδοι με εγκοπές χρησιμοποιούνταν παντού στην υφήλιο, στην Αφρική, στην Ευρώπη, στα νησιά του ειρηνικού, στην Αμερική και στην Κίνα.

Η δεύτερη μέθοδος τήρησης αριθμητικών αρχείων είναι το κορδόνι ή το σκοινί με κόμπους. Κι αυτή η μέθοδος ήταν διαδεδομένη και ανακαλύφθηκε σε διάφορα μέρη. (Αφρική, Κίνα κλπ.) Τα πιο εξελιγμένα κορδόνια με κόμπους κατασκευάστηκαν από τους Ίνκας στο Περού. Οι τελευταίοι ονόμασαν τα κορδόνια τους κίτου και τα χρησιμοποιούσαν για τις επίσημες συναλλαγές. Είχαν 3 διαφορετικά είδη κόμπων και διέφεραν στο μήκος, το χρώμα ακόμα και στη θέση των συμπλεγμάτων των κόμπων.

Η τρίτη μέθοδος τήρησης αριθμητικών αρχείων είναι τα πήλινα κουπόνια ή μάρκες. Για πολλά χρόνια, οι επιστήμονες ήταν σε σύγχυση εξαιτίας αυτών που βρέθηκαν σε νεολιθικές πόλεις της Γόνιμης Ημισελήνου. Τα παλαιότερα από αυτά προέρχονταν από τοποθεσίες στο Ιράν και χρονολογούνται στο 8000π.Χ. Έχουν σχήμα σφαιρικό, δίσκου, κωνικό, ωσειδές, τριγωνικό και άλλα. Αρχικά, οι αρχαιολόγοι πίστευαν πως χρησιμοποιούνταν ως παιχνίδια ή πόνια αλλά ύστερα από μια έρευνα στο πανεπιστήμιο του Τέξας, χρησιμοποιούνταν για την τήρηση αρχείων.

ΣΟΥΜΕΡΙΟΙ

Στη Χαλκολιθική Εποχή 4500-3000 π.Χ τα μικρά χωριά αγροκαλλιιεργειών αναπτύχθηκαν και έγιναν πόλεις. Οι πρώτες πόλεις εμφανίστηκαν σε μια περιοχή στο κατώτερο κομμάτι της Μεσοποταμίας με το όνομα Σουμερία [σημερινό νότιο Ιράκ]. Οι Σουμέριοι έφτασαν εκεί γύρω στο 3500 και ίδρυσαν αυτοκρατορία. Η αυτοκρατορία διήρκεσε μέχρι το 2000 π.Χ περίπου που κατακτήθηκε από τους Βαβυλώνιους.

Η ανάπτυξη των πόλεων στη Δυτική Ασία οδήγησε στην αύξηση του πληθυσμού και κατ' επέκταση σε αύξηση της εργατικής δύναμης. Έτσι κατευθύνθηκαν σε νέα πιο εξειδικευμένα επαγγέλματα και σε παραγωγή αγαθών. Η ανταλλαγή εμπορευμάτων και πρώτων υλών ήταν απαραίτητη για να ακμάσουν οι πόλεις, όπως στην περιοχή της Σουμερίας όπου δεν υπήρχε πρόσβαση σε ξυλεία ή μέταλλα. Η μεταφορά και επαλήθευση των φορτίων έκαναν απαραίτητη την ύπαρξη λογιστών. Οι Σουμέριοι προσπαθώντας να λύσουν τα προβλήματα αυτά επινόησαν τα κουπόνια και τελικά τη γραφή. Για να είναι σίγουροι οι πωλητές και οι αγοραστές ότι δεν έγινε κάποιο λάθος στη μεταφορά είχαν ένα «έγγραφο» το οποίο αποτελούνταν από ένα σύνολο κουπονιών που προσδιόριζαν το πλήθος και το είδος των εμπορευμάτων. Επειδή όμως ο καθένας μπορούσε να κλέψει κουπόνια και τον αντίστοιχο αριθμό αγαθών για να φαίνεται το φορτίο πλήρες, οι πόλεις στη Γόνιμη Ημισέληνο επινόησαν μια νέα τεχνική: τα κάλυπταν με πηλό τον οποίο στη συνέχεια έψηναν. Ο αγοραστής μπορούσε μ' αυτό τον τρόπο να σπάσει τον πηλό και να επαληθεύσει τον αριθμό των κουπονιών με τα αντίστοιχα αγαθά. Οι πήλινες μπάλες με τα κουπόνια ονομάζονταν σφραγίδες ή φάκελοι και η πρώτη ανακάλυψη τους έγινε στα Σούσα. Οι παλαιότεροι φάκελοι προέρχονται από το Φαρουκαμπάντ [βόρεια από τα Σούσα] περίπου το 3700-3500 π.Χ.

Οι πωλητές έπρεπε να αποδείξουν ότι παρέδιδαν τις σωστές ποσότητες. Γι' αυτό το λόγο χάραζαν ή ζωγράφιζαν μια εικόνα των κουπονιών που είχε ο φάκελος στην εξωτερική επιφάνεια πριν ψηθούν. Επομένως ο αγοραστής μπορούσε να 'διαβάσει' ποιο ήταν το φορτίο και να επαληθεύσει τον αριθμό που είχε χαρακτεί με τον αριθμό των κουπονιών και άρα με το φορτίο. Όμως, τελικά οι Σουμέριοι κατάλαβαν πως τα κουπόνια μέσα στους φακέλους ήταν περιττά αφού ο αριθμός τους χαραζόταν στην πήλινη επιφάνεια. Ως αποτέλεσμα εγκατέλειψαν τη χρήση φακέλων και ξεκίνησε η χρήση της γραφής μέσω πλακιδίων. Κάθε κουπόνι αναπαριστούσε ένα αντικείμενο, αφού οι αριθμοί δεν είχαν διαχωριστεί από τα αντικείμενα. Αυτό ονομάζεται συγκεκριμένη αρίθμηση και χρησιμοποιούνταν μεταξύ 3500-3100 π.Χ.

Το 3100 π.Χ περίπου διαχωρίστηκαν τα αποτυπώματα από τα αντικείμενα. Οι αφηρημένοι αριθμοί αποτυπώνονταν στον πηλό ενώ αυτοί των μετρούμενων αντικειμένων χαραζόνταν με εργαλείο γραφής στον πηλό. Αυτό αποδείχτηκε πιο αποτελεσματικό και

διευκόλυνε τη χρήση πληθικών αριθμών, που δήλωναν την ποσότητα, σε συνδυασμό με το πικτόγραμμα, που δήλωνε το είδος του αντικειμένου. Από τη στιγμή που διαχωρίστηκαν τα αντικείμενα από τους αριθμούς, τα πικτογράμματα χρησιμοποιήθηκαν για να συμβολίζουν άλλες ιδέες και αυτό οδήγησε στη γραφή.

Οι Σουμέριοι γνώριζαν τις 4 βασικές πράξεις της αριθμητικής: την πρόσθεση, την αφαίρεση τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Η πολυπλοκότητα της κοινωνίας τους απαιτούσε επιδεξιότητα στο χειρισμό των φυσικών αριθμών. Τα πρώτα κουπόνια που αντιπροσώπευαν αριθμούς και το σύστημα αρίθμησής τους ήταν πολύπλοκα σε σχέση με το αρχαιότερο δυαδικό, πενταδικό και το δεκαδικό σύστημα διότι ήταν εξηνταδικό σύστημα με βάση το 60 και το 10. Επίσης, αρκετά πλακίδια ήταν έργο των μαθητευόμενων γραφέων. Από αυτά οι Σουμέριοι μπορούσαν να δουλεύουν με πολύ μεγάλους αλλά και με πολύ μικρούς αριθμούς χρησιμοποιώντας ακέραιους αριθμούς αλλά και κλάσματα. Για να χαράξει το «ένα», ο γραφέας πίεζε τη γραφίδα πάνω στον πηλό υπό γωνία και έτσι σχηματιζόταν ένα «D». Το σύμβολο «ένα» επαναλαμβανόταν για να σχηματιστούν οι μεγαλύτεροι αριθμοί. Ο γραφέας διαχώριζε μια συλλογή αριθμητικών ψηφίων και τα τοποθετούσε μέσα σ' ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Όταν έφταναν στο 10, η γραφίδα πιεζόταν κάθετα μέσα στον πηλό και με αυτόν τον τρόπο σχηματιζόταν ένας μικρός κύκλος. Το σύστημά τους δεν είχε βάση το 10 αλλά το 60. Από το 1 έως το 59 χρησιμοποιούσαν ένα συνδυασμό μονάδων και δεκάδων. Για το 60 είχαν ένα μεγάλο σύμβολο (D), ακουμπισμένο στο πλάι. Το επόμενο βήμα ήταν το 600 ή $60 \cdot 10$, το οποίο συμβολιζόταν με ένα D και είχε έναν μικρό κύκλο στο εσωτερικό του. Το $60 \cdot 60$ (3600) ζωγραφιζόταν με έναν μεγάλο κύκλο και το 36000 ($10 \cdot 60 \cdot 60$) ήταν ένας μεγάλος κύκλος μ' ένα μικρό κύκλο στο εσωτερικό του. Το πρώτο αριθμητικό σύστημα των Σουμέριων ήταν ένα μη καθοριζόμενο από τη θέση σύστημα, αφού ο γραφέας πρόσθετε τις τιμές των διαφόρων συμβόλων για να φτάσει στο άθροισμα. Περίπου το 2400π.Χ. οι Σουμέριοι έκοβαν επιταγές υπολόγιζαν τη γη σε σαρ, ζύγιζαν σε τάλαντα, μετρούσαν σε υγρά και υπολόγιζαν τόκους. Χρησιμοποιούσαν το $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{5}{6}$. Από το ξεκίνημα της ονομαστικής απαρίθμησης οι αριθμοί άρχισαν να γίνονται αφηρημένοι και οι μόνοι διαθέσιμοι αριθμοί ήταν οι φυσικοί. Έτσι, πρωτοεμφανίστηκε ένα νέο είδος αριθμών. Μάλιστα, συγκριτικά με τους Έλληνες και τους Αιγύπτιους, οι Σουμέριοι ήταν οι μόνοι που δέχθηκαν την ιδέα των κλασμάτων απόλυτα.

BABYLONIOI

Περίπου το 2000π.Χ ο λαός των Αμοριτών εισέβαλε στη γη των Σουμερίων και κατέκτησε τις πόλεις τους. Αυτός ο λαός έγινε γνωστός ως Βαβυλώνιοι και δημιούργησαν σιγά σιγά μια μεγάλη αυτοκρατορία που περιλάμβανε περιοχές του σημερινού Ιράκ, της Ιορδανίας και της Συρίας. Η αυτοκρατορία τους διήρκησε έως και το 538π.Χ.

Οι Βαβυλώνιοι κατέκτησαν τη γη των Σουμερίων και υιοθέτησαν τόσο τη σφηνοειδή γραφή όσο και τα μαθηματικά τους. Οι παλαιότερες καταγραφές μας μάς δίνουν πληροφορίες για τα βαβυλωνιακά μαθηματικά. Οι Βαβυλώνιοι κράτησαν το βασικό σύστημα αρίθμησης των Σουμερίων το οποίο είχε ως βάση το 10 και το 60, εγκατέλειψαν τα ειδικά σύμβολα και κράτησαν μόνο 2: τη σφήνα, η οποία συμβόλιζε το 1 και το άγκιστρο το οποίο συμβόλιζε το 10. Έπειτα χρησιμοποίησαν ένα καθοριζόμενο από τη θέση σύστημα το οποίο είχε την ικανότητα να αναπαριστά μεγάλους ή μικρούς αριθμούς. Επίσης, αυτό το σύστημα τους έκανε να ξεχωρίζουν ανάμεσα στους λαούς της αρχαιότητας. Ακόμα, το καθοριζόμενο από τη θέση βαβυλωνιακό σύστημα λειτουργούσε με τον ίδιο τρόπο όπως το δικό μας αλλά είχε βάση το 60 και όχι το 10.

Οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιώντας το καθοριζόμενο από τη θέση σύστημα τους, είχαν τη δυνατότητα να γράφουν πολύ μεγάλους και πολύ μικρούς αριθμούς και μπορούσαν κάνουν με επιδεξιότητα υπολογισμούς. Οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποίησαν ως βάση το 60, γιατί αυτός ο αριθμός μπορεί να διαιρεθεί τέλεια από πολλούς μικρότερους αριθμούς.

Δυστυχώς, το βαβυλωνιακό σύστημα υστερούσε εξαιτίας δυο σημαντικών ελλείψεων. Πρώτον, δεν υπήρχε αριθμός θέσης, όπως το δικό μας μηδέν για να δείχνει ότι μια από τις δυνάμεις του 60 ήταν κενή. Δεύτερον, δεν υπήρχε υποδιαστολή για να δείχνει που άρχιζε το κλασματικό τμήμα του αριθμού, πράγμα που έκανε ασαφείς τους γραπτούς αριθμούς τους. Όμως, παρότι έλειπαν το μηδέν και η υποδιαστολή, το σύστημα αρίθμησης των Βαβυλωνίων ήταν ανώτερο σε σχέση με τα μη καθοριζόμενα από τη θέση συστήματα των Αιγυπτίων και των Ελλήνων και γι' αυτό το λόγο, οι Βαβυλώνιοι έφτασαν σε έναν υψηλότερο βαθμό μαθηματικής κουλτούρας. Ακόμα, ανακαλύφθηκαν πολλές πλάκες που αποτελούσαν μαθηματικούς πίνακες για πολλαπλασιασμούς, για τον υπολογισμό τετραγώνων, των αντίστροφων αριθμών, των κύβων, των τετραγωνικών ριζών καθώς και πίνακες υπολογισμού των τόκων. Επίσης, οι Βαβυλώνιοι είχαν το πλεονέκτημα να γνωρίζουν πώς να χρησιμοποιούν την άλγεβρα για να επιλύουν προβλήματα ανώτερου επιπέδου από αυτά των Αιγυπτίων. Καθώς γνώριζαν πώς να προσθέτουν και να πολλαπλασιάζουν και τις δύο πλευρές μιας εξίσωσης για να την

απλοποιούν. Επιπλέον, εκτελούσαν απλή παραγοντοποίηση όρων και τέλος δεν χρησιμοποιούσαν γράμματα για να συμβολίζουν ποσότητες, αλλά χρησιμοποιούσαν όρους όπως ο όγκος, το μήκος και το πλάτος.

Ένα ακόμα χαρακτηριστικό των Βαβυλωνίων για τα μαθηματικά είναι ότι μπορούσαν να επιλύουν συστήματα εξισώσεων με δύο αγνώστους, ορισμένες δευτεροβάθμιες εξισώσεις και κάποιες κυβικές εξισώσεις. Γνώριζαν επιπλέον το πυθαγόρειο θεώρημα, το οποίο λέει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το τετράγωνο της υποτείνουσας και με σύμβολα γράφεται ως: $a^2 = b^2 + c^2$. Οι επιστήμονες της αρχαιότητας θεωρούσαν ότι το ανακάλυψε ο Πυθαγόρας, όμως μεταγενέστερες ανακαλύψεις φανέρωσαν ότι τόσο οι Βαβυλώνιοι όσο και οι Κινέζοι το γνώριζαν πριν από αυτόν. Επίσης, οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν τους πυθαγόρειους αριθμούς αφού έφτιαζαν πίνακες με αυτό. Οι Βαβυλώνιοι είχαν υπολογίσει το $\sqrt{2}$ όπου είχαν πέσει έξω με πολύ μικρή διαφορά. Αυτό τους οδήγησε να δείξουν ενδιαφέρον και να ανακαλύψουν τους άρρητους αριθμούς, αριθμούς που έπρεπε να περιμένουμε άλλους 15 για να προσδιοριστούν. Τέλος, οι Βαβυλώνιοι, εφάρμοσαν τα μαθηματικά στην επιστήμη της αστρονομίας.

Όμως, τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων είχαν ελλείψεις όπως του μηδέν, της υποδιαστολής στο αριθμητικό τους σύστημα. Παρότι υπήρχαν αυτές οι ελλείψεις οι Βαβυλώνιοι πέτυχαν τον ύψιστο βαθμό μαθηματικής ικανότητας της εποχής τους, ξεπερνώντας τους Αιγύπτιους που ήταν σύγχρονοί τους.

Τέλος, υπήρχαν επιτεύγματα των λαών της Δυτικής Ασίας όπως, από τους Σουμέριους και τους Βαβυλώνιους. Έτσι, μπορούμε να καταγράψουμε κάποια κύρια σημεία:

- Εφευρέθηκε η γραφή
- αναπτύχθηκε ένα καθοριζόμενο από τη θέση αριθμητικό σύστημα
- Εισήχθησαν τα κλάσματα
- Τα μαθηματικά εξελίχθηκαν από την απλή αρίθμηση πραγμάτων στην επίλυση προβλημάτων και στη μέτρηση μεγεθών.

Επίσης, έχουν ανακαλυφθεί χιλιάδες πήλινα πλακίδια των Σουμερίων και των Βαβυλωνίων, πολλά από τα οποία δεν έχουν αποκρυπτογραφηθεί. Νέες ανακαλύψεις μπορεί να μας αναγκάσουν να επανεκτιμήσουμε τα μαθηματικά επιτεύγματα αυτών των αξιόλογων λαών.

ΑΙΓΥΠΤΙΟΙ

Ο πολιτισμός των Αιγυπτίων άρχισε πιθανόν κάποια στιγμή την 5^η χιλιετία π.Χ και διήρκησε μέχρι που τους κατέκτησε ο Μέγας Αλέξανδρος το 330π.Χ., περίπου 4 χιλιετίες. 3000 χρόνια αφού ο Μήνης ένωσε την Άνω και την Κάτω Αίγυπτο κάνοντας πρωτεύουσα τη Μέμφιδα, οι Αιγύπτιοι αποτέλεσαν μια τεράστια παγκόσμια δύναμη. Μάλιστα, έφτασαν στην ακμή του πρώιμου πολιτισμού τους από το 3000π.Χ. μέχρι την 3^η δυναστεία, γύρω στο 2500π.Χ.. Σε αυτό το διάστημα, έχτισαν τις πυραμίδες και λογικά σ' αυτήν την περίοδο έθεσαν τις βάσεις των μαθηματικών τους.

Η ισχύς του αιγυπτιακού πολιτισμού, ο οποίος στηριζόταν στην αφθονία του σιταριού που καλλιεργούσαν κατά μήκος του Νείλου, παρείχε στους Αιγύπτιους διάρκεια και σταθερότητα. Αυτή η ισχύς αντικατοπτρίζεται στα σπουδαία μνημεία τους και στην πρωτοφανή μακροήμερευση της κοινωνίας τους αλλά και στο γεγονός ότι τα μαθηματικά τους δεν αναπτύχθηκαν πολύ μιας και τα παλαιά ήταν απολύτως επαρκή.

Δύο συστήματα γραφής αναπτύχθηκαν από τους Αιγύπτιους: τα ιερογλυφικά και η ιερατική γραφή. Τα ιερογλυφικά ξεκίνησαν ως απλά σύμβολα που έμοιαζαν με εικόνες γύρω στο 3000π.Χ. και ίσως είχαν επηρεαστεί από τη γραφή των Σουμερίων. Εξελίχθηκαν σε συνδυασμό πικτογραμμάτων και φωνητικών σημείων και αποσκοπούσαν στο γράψιμο επίσημων κειμένων σε μνημεία και ναούς αλλά και επιτευγμάτων του κάθε φαραώ. Η ιερατική γραφή χρησιμοποιούταν για την καθημερινή διοίκηση της αυτοκρατορίας. Ήταν λιγότερο επίσημη από τα ιερογλυφικά και περισσότερο αφηρημένη και μέσω αυτής έχουμε μάθει τα περισσότερα για τα αιγυπτιακά μαθηματικά.

Πληροφορίες για τα αιγυπτιακά μαθηματικά έχουμε αντλήσει από δύο διάσημους παπύρους: τον πάπυρο του Ριντ και τον πάπυρο της Μόσχας. Και οι 2 περιέχουν παραδείγματα συνηθισμένων πρακτικών προβλημάτων που αντιμετώπιζαν οι Αιγύπτιοι γραφείς. Ο πρώτος περιέχει 84 προβλήματα ενώ αυτός της Μόσχας 25.

Το αιγυπτιακό σύστημα αρίθμησης είχε βάση το 10. Στα ιερογλυφικά χρησιμοποιούταν ένας συνδυασμός γραμμών που αναπαριστούσαν τους αριθμούς από το 1 ως το 9 ενώ η ιερατική γραφή χρησιμοποιούσε γραμμές για το 1 ως το 3 και ξεχωριστά σύμβολα για τους 4 έως 9. Επίσης, σύμβολα χρησιμοποιούνταν και για τους αριθμούς 10, 100, 1000 κλπ. Το σύστημα ήταν καθαρά

προσθετικό αφού η τιμή ενός συμβόλου δεν συνδεόταν με τη θέση του. Αρχικά, πολλά σύμβολα επιλέγονταν με βάση τις προτιμήσεις του συγγραφέα αλλά μετά το 15^ο αι. η γραφή τυποποιήθηκε.

Οι Αιγύπτιοι επίσης χρησιμοποιούσαν κλάσματα. Με εξαίρεση τα κλάσματα $\frac{2}{3}$ και $\frac{3}{4}$, όλα τα κλάσματά τους ήταν μοναδιαία ή κλάσματα όπου ο αριθμητής ήταν το 1 και ο παρονομαστής οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός. Μάλιστα, οποιοδήποτε γνήσιο κλάσμα με αριθμητή μεγαλύτερο της μονάδας έπρεπε να αναπαρασταθεί ως άθροισμα μοναδιαίων κλασμάτων. Βέβαια, η αναπαράσταση όλων των κλασμάτων υπό τη μορφή μοναδιαίων κλασμάτων ήταν μια δύσκολη και δύσχρηστη απαίτηση. Δεν υπάρχει ένας μόνο τρόπος γραφής ενός κλάσματος ως άθροισμα μοναδιαίων κλασμάτων. Αυτό σημαίνει ότι 2 διαφορετικοί γραφείς μπορούσαν να παραστήσουν το ίδιο κλάσμα με 2 διαφορετικούς τρόπους, δυσκολεύοντας όμως έτσι τις συγκρίσεις.

Στα ιερογλυφικά, το κλάσμα συμβολιζόταν μ' ένα ωοειδές σχήμα πάνω από τον ακέραιο αριθμό ενώ στην ιερατική γραφή, ξεκινώντας από το \square , το κλάσμα συμβολιζόταν συχνά με μια κουκκίδα πάνω από τον ακέραιο αριθμό. Αυτό το σύστημα χαρακτήρων και συμβόλων διευκόλυνε τη γραφή των μοναδιαίων κλασμάτων, αφού χρειαζόταν να γράψουν μόνο τον παρονομαστή, αλλά ήταν πιο δύσκολο να γράψουν οποιοδήποτε κλάσμα πέρα απ' αυτά.

Η χρήση των μοναδιαίων κλασμάτων από τους Αιγύπτιους είχε αντίκτυπο πολύ μακρύτερα από το δικό τους το πολιτισμό μιας και τα μοναδιαία κλάσματα χρησιμοποιήθηκαν από την Εποχή των Ρωμαίων έως και την μεσαιωνική περίοδο της Ευρώπης.

Οι Αιγύπτιοι, εκτός από τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής, μπορούσαν να κάνουν αλγεβρικούς και γεωμετρικούς υπολογισμούς με τη μορφή της διήγησης προβλημάτων. Δεν υπήρχαν σύμβολα για τις αλγεβρικές πράξεις. Το σύμβολο για την πρόσθεση ήταν ένας άνδρας που μπαίνει σε ένα σπίτι ενώ για την αφαίρεση ένας άνδρας που βγαίνει από ένα σπίτι.

Έλυναν επίσης κάποιες απλές δευτεροβάθμιες εξισώσεις με έναν ή δύο αγνώστους. Στη γεωμετρία είχαν κανόνες για υπολογισμό εμβαδών ή όγκων, οι οποίοι ή ήταν σωστοί ή οδηγούσαν σε προσεγγίσεις. Για την επίλυση πολλών αλγεβρικών προβλημάτων χρησιμοποίησαν μια μέθοδο που ονομάζεται λαθεμένη παραδοχή. Στη μέθοδο αυτή, ο γραφέας μάντευε την τιμή του αγνώστου μιας εξίσωσης που ονομαζόταν κλήρος, την αντικαθιστούσε στην εξίσωση και έλεγχε αν ήταν σωστή. Αν δεν ήταν, την προσάρμοζε μέχρι να πάρει τη σωστή απάντηση. Συχνά θεωρείται ότι οι Αιγύπτιοι γνώριζαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα, ωστόσο δεν υπάρχει κάποια μαρτυρία στα κείμενα τους γι' αυτό. Είναι πιθανόν βέβαια να ήταν γνωστό στους χωρομέτρους ότι αν διαιρεθεί ένα σκοινί σε μήκη τριών, τεσσάρων και πέντε μονάδων, αν τα μήκη αυτά αποτελούσαν πλευρές τριγώνου θα σχημάτιζαν ορθογώνιο τρίγωνο. Οι Αιγύπτιοι, όπως και οι Βαβυλώνιοι δε γνώριζαν τους άρρητους αριθμούς και για το συμβολισμό των τετραγωνικών ριζών των αριθμών που συναντούσαν στα αλγεβρικά προβλήματα χρησιμοποιούσαν ακέραιους αριθμούς και κλάσματα. Οι διαστάσεις των

πυραμίδων, σύμφωνα με κάποιους επιστήμονες, αποκαλύπτουν ότι οι Αιγύπτιοι γνώριζαν ορισμένες ανώτερες μαθηματικές σχέσεις. Ο ισχυρισμός αυτός δε στηρίζεται από μαρτυρίες στα κείμενα τους. Παρά το γεγονός ότι τα μαθηματικά των Αιγυπτίων υστερούσαν σε σχέση με τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων, οι Αιγύπτιοι κατάφεραν μεγάλους άθλους στις μετρήσεις. Για παράδειγμα, το μέγιστο σφάλμα στο μήκος των πλευρών της Μεγάλης Πυραμίδας είναι μόνο 1,6 εκατοστά το οποίο αποτελεί το 1/14000 του συνολικού μήκους.

Εκτός από τα καθημερινά προβλήματα του μοιράσματος του ψωμιού και της μύρας στους εργάτες και των μετρήσεων στα κτίρια, οι Αιγύπτιοι χρειάζονταν ημερολόγιο. Στηριζόμενοι στις καλλιέργειες σιταριού στην κοιλάδα του Νείλου, έπρεπε να παρακολουθούν τις πλημμύρες του ποταμού και την αλλαγή του επιπέδου του νερού κατά τη διάρκεια του έτους.

Το Αιγυπτιακό έτος είχε δώδεκα μήνες των τριάντα ημερών συν πέντε μέρες θρησκευτικών γιορτών, συνολικά δηλαδή 365 μέρες. Αυτό έπεφτε έξω κατά ένα τέταρτο της ημέρας και δε γινόταν η πρόσθεση μιας επιπλέον ημέρας κάθε τέσσερα χρόνια το Φεβρουάριο με αποτέλεσμα οι εποχές να πάψουν να συμφωνούν με το ημερολόγιο. Μόνο ύστερα από 1460 χρόνια θα ταιριάζουν οι μέρες με τις εποχές. Με βάση αυτό θεωρείται ότι το αιγυπτιακό ημερολόγιο υιοθετήθηκε ή το 4241 π.Χ ή το 2773 π.Χ . Οι Αιγύπτιοι δε στήριζαν το ημερολόγιο σε ολόκληρους αστερισμούς σαν τους Βαβυλώνιους αλλά στην εμφάνιση ενός αστεριού, του Σείριου. Η αστρονομία τους, δηλαδή, ήταν κατώτερη από αυτή των Βαβυλωνίων. Το ημερολόγιο ξεκινούσε την πρώτη μέρα του καλοκαιριού που ο Σείριος ήταν ορατός πάνω από τον ορίζοντα ακριβώς πριν από την ανατολή του ηλίου. Η μέρα αυτή επιλέχθηκε πιθανόν επειδή ήταν η μέρα που άρχισαν να ανεβαίνουν τα νερά του Νείλου.

Συνοψίζοντας, τα μαθηματικά των Αιγυπτίων είναι πολύ παλιά. Είναι πιθανόν να αναπτύχθηκαν το πρώτο μισό της τρίτης χιλιετίας π.Χ και καθιερώθηκαν με λίγες πρόσθετες βελτιώσεις. Ήταν κατώτερα από αυτά των Βαβυλωνίων και παρέμειναν αμετάβλητα για δύο με τρεις χιλιάδες χρόνια. Οι Αιγύπτιοι είχαν μια πιο πρωτόγονη αντίληψη για τα κλάσματα σε σχέση με τους Βαβυλώνιους και δεν αντιλήφθηκαν ότι οι ποσότητες μπορούσαν να συμβολιστούν με ένα κλάσμα αντί για συνδυασμό μοναδιαίων κλασμάτων. Τα μαθηματικά αυτά χρησιμοποιούνταν ως πρακτικό εργαλείο και δεν υπάρχουν μαθηματικές αποδείξεις. Από τα είδη των προβλημάτων στους παπύρους μπορούμε να υποθέσουμε ότι επίλυαν προβλήματα για ψυχαγωγικούς σκοπούς.

Γενικότερα αν τα μαθηματικά εξαρτιόνταν από τον ελεύθερο χρόνο ιερέων και γραφέων, θα έπρεπε να είχαν αναπτυχθεί ιδιαίτερα. Στα μαθηματικά δεν αναπτύχθηκαν επειδή οι άνθρωποι ήταν αργόσχολοι ,αλλά επειδή ήταν απαραίτητα. Όταν σχεδιάζονταν και κατασκευάζονταν οι πυραμίδες, 3500-2500 π.Χ, οι Αιγύπτιοι χρειάζονταν κάποια μαθηματικά για να λύσουν καθημερινά πρακτικά προβλήματα. Αφού ολοκληρώθηκε αυτό οι κανόνες των μαθηματικών καθιερώθηκαν και δεν εξελίχθηκαν.

Τα παλαιότερα προβλήματα που περιέγραφαν οι Σουμέριοι και οι Αιγύπτιοι ήταν γραμμένα σε πεζό λόγο. Ένα παράδειγμα είναι:

Αν κάθε εργάτης χρειάζεται τρεις φρατζόλες ψωμί πόσες φρατζόλες θα χρειαστούν 140 εργάτες;

Αυτή η προσέγγιση στη διατύπωση προβλημάτων είναι γνωστή ως «ρητορική άλγεβρα». Χρησιμοποιούνταν από τους αρχαίους επειδή δεν είχαν τα σημερινά σύμβολα για να αναπαριστούν διάφορες ποσότητες και πράξεις. Η ρητορική προσέγγιση ήταν αργή και δύσκολη, ενώ επέτρεπε σε διαφορετικά άτομα να γράψουν το ίδιο πρόβλημα με διαφορετικούς τρόπους. Επομένως ήταν μικρός ο βαθμός τυποποίησης.

Η σύγχρονη συμβολική άλγεβρα αντικαθιστά τις λέξεις με μαθηματικά σύμβολα και έτσι τα προβλήματα απλοποιούνται και κατηγοριοποιούνται εύκολα και οι λύσεις προκύπτουν πιο άμεσα. Χρησιμοποιούμε τη συμβολική αναπαράσταση για να ξεχωρίσουμε τα διαφορετικά είδη προβλημάτων που ιστορικά υπήρξαν η αφορμή για την αναζήτηση επιπλέον αριθμών. Τα σύμβολα είναι απλά. Χρησιμοποιούνται τα σύμβολα των τεσσάρων πράξεων της αριθμητικής (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση). Για το συμβολισμό των αριθμών που αποτελούν τις λύσεις χρησιμοποιούμε γράμματα από το τέλος της αλφαβήτου. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την εξίσωση ως τρόπο έκφρασης των προβλημάτων όπου η αριθμητική του αριστερού σκέλους θα εξισορροπεί με ίση τιμή στο δεξί σκέλος. Θα διαχωρίσουμε το δεξί από το αριστερό σκέλος με το σύμβολο του ίσον και αργότερα θα προσθέσουμε συμβάσεις που βοηθούν στην απλοποίηση.

Ένα παράδειγμα που θα μπορούσε να υπάρχει στην Αρχαία Αίγυπτο μας βοηθάει να δούμε πως περάσαμε από τη ρητορική προσέγγιση της λύσης των προβλημάτων στη σύγχρονη συμβολική προσέγγιση. Αυτό είναι:

■ Αν υπάρχουν επτά εργάτες και ο καθένας παίρνει τέσσερα μερίδια αραιωμένης μύρας, ενώ ο αρχιεργάτης λαμβάνει διπλή ποσότητα, πόση είναι η αραιωμένη μύρα που χρειάζονται;

→ Αρχικά αναδιατάσσουμε τις λέξεις με μορφή εξίσωσης:

· Η συνολική αραιωμένη μύρα που χρειάζονται ισούται με τέσσερα μερίδια για καθέναν από τους επτά εργάτες συν δύο επί τέσσερα μερίδια για τον αρχιεργάτη.

→ Ένα σημαντικό στάδιο της μετάβασης από τη ρητορική στη συμβολική άλγεβρα ονομάζεται συγκοπή, όρος που χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Έλληνα μαθηματικό Διόφαντο τον 3^ο αιώνα μΧ. Στη συγκοπτόμενη αλγεβρική γραφή γράφουμε με σύντομο τρόπο κάποιες από τις λέξεις. Δηλαδή:

· Η Σ.Μ (συνολική μύρα) ισούται με τέσσερα μερίδια για επτά Ε (εργάτες) συν δύο επί τέσσερα μερίδια για τον Α (αρχιεργάτη)

→ Τώρα θα αντικαταστήσουμε τη λέξη «ισούται» με το σύμβολο του ίσον.

· Σ.Μ = τέσσερα μερίδια για επτά Ε συν δύο επί τέσσερα μερίδια για τον Α

→ Πλησιάζουμε τη συμβολική γραφή αφού ο τρόπος που εκθέτουμε το πρόβλημα γίνεται όλο και πιο σύντομος. Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα των πράξεων +, -, /, * και αριθμητικά ψηφία στη θέση των αριθμητικών λέξεων.

· Σ.Μ = 4 μερίδια * 7 Ε + 2 * 4 μερίδια Α

→ Αντικαθιστούμε το Σ.Μ με Χ αφού είναι η άγνωστη ποσότητα και σβήνουμε τις λέξεις:

· Χ = 4 * 7 + 2 * 4 (=36)

Χωρίς τις λέξεις που μας μπερδεύουν μπορούμε να επιλύσουμε το πρόβλημα κάνοντας δύο πολλαπλασιασμούς και μία πρόσθεση. Το πρόβλημα σε εμάς φαίνεται εύκολο αλλά δεν ήταν πάντα έτσι.

Μπορούμε να φανταστούμε τη σύγχυση και τις διαφωνίες που θα πρέπει να προέκυπταν όταν τα προβλήματα διατυπώνονταν εξ ολοκλήρου με ρητορική γραφή.

Το βασικό αλγεβρικό πρόβλημα είτε διατυπώνεται με ρητορική είτε με συμβολική γραφή είναι η εύρεση ενός αριθμού. Για τον υπολογισμό χρησιμοποιούμε τις τέσσερις πράξεις αριθμητικής. Όμως το γεγονός ότι ξεκινώντας με αριθμητικές και εκτελώντας πράξεις δεν ήξεραν αν θα έπαιρναν ως αποτέλεσμα έναν άλλο αριθμό, βασάνιζε τους αρχαίους γιατί τα συστήματα αριθμών τους ήταν πολύ περιορισμένα για να τους δίνουν ένα χρήσιμο αποτέλεσμα σε όλες τις περιπτώσεις. Αν είμαστε βέβαιοι ότι μία πράξη με αριθμούς έχει ως αποτέλεσμα έναν αριθμό του ίδιου είδους, τότε λέμε πως οι αριθμοί είναι κλειστοί ως προς αυτή την πράξη. Για

παράδειγμα ,το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση αλλά όχι ως προς την αφαίρεση πχ $3+4=7$ ενώ $3-7=-4$, το οποίο (-4) δεν είναι φυσικός αριθμός.

Η έννοια του κλειστού συνόλου σε συνδυασμό με τη συμβολική άλγεβρα μας βοηθά να καταλάβουμε γιατί δυσκολεύονταν οι πρόγονοί μας να κατανοήσουν τις αφηρημένες σχέσεις. Αν σκεφτούμε τα διάφορα είδη προβλημάτων με τη μορφή της συμβολικής άλγεβρας καταλαβαίνουμε επίσης τους περιορισμούς που αντιμετώπισαν οι Αιγύπτιοι αλλά και οι Βαβυλώνιοι. Για παράδειγμα δεν μπορούσαν να κατανοήσουν τις απλές εξισώσεις πχ $x+7=4$ γιατί η λύση είναι -3 ένας αριθμός που δε γνώριζαν. Έτσι τόσο οι Αιγύπτιοι όσο και οι Βαβυλώνιοι μπορούσαν να προσεγγίσουν την απάντηση αλλά δεν αντιλήφθηκαν ότι η ακριβής λύση απαιτούσε ένα άλλο είδος αριθμού.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το θέμα με το οποίο ασχοληθήκαμε σε αυτό το τετράμηνο είχε πολύ ενδιαφέρον και εντυπωσιαστήκαμε με τις διάφορες πληροφορίες τις οποίες διαβάσαμε και επεξεργαστήκαμε από την έρευνα κειμένων μέσω του βιβλίου. Πιο συγκεκριμένα ήταν αξιοθαύμαστο το γεγονός ότι η αρίθμηση εμφανίστηκε πριν τις λέξεις. Αρχικά γνωρίσαμε την αρίθμηση με τα κλαδιά. Έπειτα υπήρξε η αρίθμηση με τα δάχτυλα, αργότερα με το σώμα και τέλος η λεκτική η οποία είχε δύο συστήματα το δυαδικό και το πενταδικό. Επίσης με την εξέλιξη της κοινωνίας έπρεπε να εξελιχθεί και η αρίθμηση με αποτέλεσμα μια νέα μέθοδο καταγραφής η οποία αποτέλεσε την αρχή της αντιστοιχίας ένα προς ένα. Επιπλέον λόγω της αγροκαλλιέργειας αναπτύχθηκε μια άρχουσα τάξη όπου οι γραμματικοί υπολόγιζαν τους φόρους των ατόμων και των νοικοκυριών. Την πρώτη εμφάνιση αποτέλεσαν οι Σουμέριοι οι οποίοι για την επίλυση των προβλημάτων τους επινόησαν τα κουπόνια και τελικά την γραφή. Γνώριζαν τις 4 βασικές πράξεις της αριθμητικής: την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Τα πρώτα κουπόνια ήταν πολύπλοκα καθότι χρησιμοποιούσαν το εξηταδικό σύστημα. Ακόμα μπορούσαν να δουλεύουν με πολύ μεγάλους αλλά και με πολύ μικρούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας ακέραιους και κλάσματα. Οι Σουμέριοι έκοβαν επιταγές, υπολόγιζαν τη γη σε σαρ, ζύγιζαν σε τάλαντα, μετρούσαν σε υγρά και υπολόγιζαν σε τόκους. Μια νέα εμφάνιση αποτέλεσαν οι Βαβυλώνιοι οι οποίοι κατέκτησαν τη γη των Σουμερίων και μαζί τη σφηνοειδή γραφή τους και τα μαθηματικά τους. Κράτησαν το βασικό σύστημα των Σουμερίων. Το Βαβυλωνιακό σύστημα είχε ελλείψεις διότι δεν υπήρχε αριθμός θέσης όπως το δικό μας μηδέν και δεν υπήρχε υποδιαστολή. Γνώριζαν πως να χρησιμοποιούν την άλγεβρα ώστε να επιλύουν προβλήματα ανώτερου επιπέδου. Δεν χρησιμοποιούσαν γράμματα για να συμβολίζουν ποσότητες αλλά όρους όπως ο όγκος, το μήκος και το πλάτος. Τέλος, οι Βαβυλώνιοι εφάρμοσαν τα μαθηματικά στην επιστήμη της αστρονομίας και πέτυχαν τον ύψιστο βαθμό μαθηματικής ικανότητας της εποχής τους. Ακόμα μια εμφάνιση έκαναν οι Αιγύπτιοι όπου είχαν μεγάλη ισχύ λόγω της αφθονίας του σιταριού κατά μήκος του Νείλου. Καταλαβαίνουμε αυτή την ισχύ στα σπουδαία μνημεία τους και στη μακροήμερευση της κοινωνίας τους αλλά και το γεγονός ότι τα μαθηματικά του δεν αναπτύχθηκαν πολύ μιας και τα παλαιά ήταν απολύτως επαρκή. Οι Αιγύπτιοι έκαναν παραδείγματα συνηθισμένων πρακτικών προβλημάτων. Το 10 ήταν η βάση του Αιγυπτιακού συστήματος αρίθμησης και εμφάνιση κάνουν και η χρήση των κλασμάτων με εξαίρεση τα $\frac{2}{3}$ και $\frac{3}{4}$. Επιπροσθέτως οι Αιγύπτιοι είχαν την ικανότητα να πραγματοποιούν αλγεβρικούς και γεωμετρικούς υπολογισμούς με τη μορφή διήγησης προβλημάτων. Έλυναν κάποιες απλές δευτεροβάθμιες εξισώσεις με έναν ή δύο αγνώστους και στη γεωμετρία είχαν κανόνες για υπολογισμό εμβαδών και όγκων. Λόγω των καθημερινών προβλημάτων τους αλλά και για την καλλιέργεια σιταριού χρειάζονταν ημερολόγιο. Το Αιγυπτιακό έτος είχε συνολικά 365 μέρες το οποίο υστερούσε και στη συνέχεια διορθώθηκε. Τέλος, είμαστε πολύ ικανοποιημένες από τις επιδόσεις μας και αντλήσαμε πολλές γνώσεις από αυτή την ερευνητική εργασία.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Γενικά , θα θέλαμε να δηλώσουμε ότι αποκομίσαμε πολλά πράγματα από το κομμάτι των μαθηματικών που ονομάζεται «Ιστορία των αριθμών». Θα μπορούσαμε να πούμε ότι καταλήξαμε σε πολλά εντυπωσιακά συμπεράσματα σχετικά με αυτό το θέμα. Πρώτον, είδαμε ότι η αρίθμηση είχε αναπτυχθεί πολύ πριν την ανάπτυξη της ομιλίας και της γραφής κάτι που μας έκανε να καταλάβουμε πως η αρίθμηση είναι ένα έμφυτο και κληρονομήσιμο χαρακτηριστικό που πυροδοτήθηκε στους αιώνες εξαιτίας της ανάγκης του ανθρώπου για επιβίωση. Ως επακόλουθο, κάθε λαός είχε να δείξει το δικό του κομμάτι στην εξέλιξη των μαθηματικών και όλα αυτά συνιστούν αυτά που γνωρίζουμε εμείς σήμερα. Επιλογικά, θα λέγαμε ότι ο άνθρωπος ως το εξυπνότερο ον κατάφερε με την επινοητικότητα του και την εφευρετικότητά του κατόρθωσε να ξεπεράσει όλα τα προβλήματα επιβίωσης που του παρουσιάστηκαν.

Επίλογος

Συνοψίζοντας, το τετράμηνο αυτό μάθαμε πολλά πράγματα για την ιστορία των αριθμών αλλά και πως εξελίχθηκαν μέσα στους αιώνες από διάφορους λαούς γνωστούς στην ιστορία για διάφορα δημιουργήματά τους, όπως για παράδειγμα οι Αιγύπτιοι. Είμαστε πολύ ικανοποιημένοι από τη συνεργασία μεταξύ μας και ως ομάδα και ως σύνολο με τις υπόλοιπες ομάδες αλλά και με την καθηγήτριά μας που μας βοήθησε σε αυτήν την πορεία. Επειδή μάθαμε πολλά πράγματα σε μικρό χρονικό διάστημα και λόγω του φόρτου εργασιών μέσα σε αυτό το τετράμηνο, κουραστήκαμε να αντεπεξέλθουμε σε μια αρκετά μεγάλη μάζα ιστορικών πληροφοριών για τα μαθηματικά αλλά τελικά το αποτέλεσμα αποδείχθηκε ευχάριστο και εποικοδομητικό για εμάς. Γενικά, ήταν ένα θέμα γεμάτο εκπλήξεις για εμάς, που δε γνωρίζαμε από πού προήλθαν οι αριθμοί ως αφηρημένες έννοιες, και από εκεί πήγαζε το μεγαλύτερο μέρος του ενδιαφέροντος που δείξαμε στην επιλογή αυτού του θέματος.

Βιβλιογραφία

- ◆ Βιβλίο:
«Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών», CALVIN C. CLAWSON, Εκδόσεις Κέδρος



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

♣ Αιγυπτιακό ημερολόγιο

Οι Αιγύπτιοι ήταν γεωργικός λαός και είχε μεγάλη σημασία γι' αυτούς να ξέρουν τις κατάλληλες χρονικές περιόδους για την καλλιέργεια, τη σπορά και τη συγκομιδή. Έτσι ασχολήθηκαν από πολύ νωρίς με την αστρονομία. Ο Νείλος ήταν πηγή ζωής για την αρχαία Αίγυπτο και με τις πλημμύρες του ρύθμιζε την αιγυπτιακή ζωή. Η ανάγκη να υπολογίζονται οι περίοδοι των πλημμύρων δημιούργησε την αιγυπτιακή αστρονομία και μαζί μ' αυτήν την κυριαρχία της κάστας των ιερέων, ως καθοδηγητών της γεωργίας. Σύμφωνα με το αιγυπτιακό ημερολόγιο, το έτος χωρίζεται σε 365 ημέρες, 12 μήνες από 30 ημέρες ο καθένας και στο τέλος πρόσθεταν 5 συμπληρωματικές ημέρες. Ο κάθε μήνας αποτελούνταν από τρία δεκαήμερα. Το ημερονύκτιο χωριζόταν σε 12 ώρες ημέρας και 12 νύχτας. Οι ώρες δηλαδή ήταν άνισες και κυμαίνονταν ανάλογα με την εποχή του έτους. Οι εποχές ήταν τρεις: πλημμύρας, σποράς και θερισμού και καθεμία περιλάμβανε 4 μήνες. Οι 5 επιπρόσθετες ημέρες στο τέλος του έτους ήταν αφιερωμένες στις 5 μεγάλες θεότητες της Αιγύπτου: Όσιρη, Ώρο, Ίσιδα, Σημ και Νέφθη.

Η συσχέτιση του ημερολογίου με τον πραγματικό χρόνο γινόταν με τις εμφανίσεις του Σείριου, που αντιστοιχούσαν σε χρονική περίοδο 365-2507 ημερών. Το βασικό μειονέκτημα του αιγυπτιακού ημερολογίου βασιζόταν στο γεγονός ότι ο χρόνος έχει 365 1/4 ημέρες. Άρα μέσα σε 4 χρόνια από τα τέταρτα σχηματιζόταν μία ημέρα. Το γεγονός αυτό ήταν γνωστό στους ιερείς - αστρονόμους. Παρ' όλα αυτά όμως δεν το διόρθωσαν, γιατί σύμφωνα με τη θεοκρατική αντίληψή τους έπρεπε να βασιλεύει στον ουρανό απόλυτη αρμονία. Τα χρόνια αριθμούνταν σύμφωνα με τις βασιλείες των φαραώ, πράγμα που διατηρήθηκε μέχρι την εποχή των Πτολεμαίων, οπότε και καθιερώθηκαν οι χρονολογικές εποχές. Ο Πτολεμαίος ο Ευεργέτης το 238 π.Χ. επιχείρησε να καθιερώσει μία ημέρα ακόμα στη διάρκεια του χρόνου ανά τέσσερα χρόνια, πράγμα που απέτυχε. Ο Αύγουστος το 26 - 23 π.Χ. κατόρθωσε να επιβάλει τη μεταρρύθμιση αυτή. Το αιγυπτιακό ημερολόγιο υιοθετήθηκε γύρω στο 500 π.Χ από τους Πέρσες και επιζει σε κάποια ελαφρά τροποποιημένη μορφή στο αρμενικό ημερολόγιο.

♣ Βαβυλωνιακό ημερολόγιο

Σύμφωνα μ' αυτό, κάθε χρόνος αποτελούνταν από 12 μήνες, που άρχιζαν με την πρώτη εμφάνιση του μηνίσκου της Σελήνης. Το βαβυλωνιακό ημερολόγιο ήταν σεληνιακό, σε αντίθεση με το αιγυπτιακό, που ήταν ηλιακό. Προκειμένου να μένει σταθερός κάθε μήνας στην ορισμένη εποχή του χρόνου, έπρεπε ένας απ' αυτούς να επαναλαμβάνεται, όταν χρειαζόταν. Στη Βαβυλώνα ως τέτοιος μήνας λαμβανόταν ή ο πρώτος ή ο έκτος, αλλά η επανάληψη γινόταν σε ανώμαλα χρονικά διαστήματα, που κυμαίνονταν από 6 μήνες μέχρι 6 χρόνια. Ο χωρισμός του ημερονυκτίου γινόταν από τους ιερείς - αστρονόμους σε 6 τετραωρίες δικές μας. Καθένα από τα 6 ίσα μέρη χωριζόταν σε 60 ίσα μέρη. Αντίθετα από το ιερατείο, ο λαός είχε άλλες χρονικές μονάδες. Χώριζε το ημερονύκτιο σε 12 ίσα μέρη, καθένα από τα οποία είχε δύο ώρες ημερινές και τα ονόμαζε κασμπού. Κάθε κασμπού χωριζόταν σε 30 ους. Συνολικά δηλαδή το ημερονύκτιο είχε 360 ους και κάθε ους αντιστοιχούσε με 4 σημερινά λεπτά.

Πηγή: http://www.coinsmania.gr/cm/guide/Calendar/calendar_info.htm

Οι περισσότερες γνώσεις που έχουμε για τα μαθηματικά των Αιγυπτίων προέρχονται από παπύρους. Οι σημαντικότεροι από αυτούς είναι οι παρακάτω:

♠ Πάπυρος του Ριντ

α) ο Πάπυρος Ριντ (Rhind), γνωστός και ως «πάπυρος του Αχμές»: μια συλλογή 84 προβλημάτων που αντιγράφηκε περίπου το 1650 π.Χ. από ένα πρωτότυπο του 1850 π.Χ και τώρα φυλάσσεται ως έκθεμα στο Βρετανικό Μουσείο Λονδίνου. Είναι το αρχαιότερο ευρύτερα γνωστό μαθηματικό κείμενο.



♠ Πάπυρος της Μόσχας

β) ο Πάπυρος της Μόσχας: μια συλλογή 25 προβλημάτων (εκ των οποίων πολλά είναι γεωμετρικά) που γράφτηκε γύρω στο 1850 π.Χ και τώρα εκτίθεται στο Μουσείο Καλών Τεχνών της Μόσχας. Εδώ περιέχεται ως ξεχωριστό επίτευγμα των αιγυπτιακών Μαθηματικών ο ακριβής υπολογισμός του όγκου της κόλουρης πυραμίδας με τετραγωνική βάση.

